XXVII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP I
Zadania teoretyczne

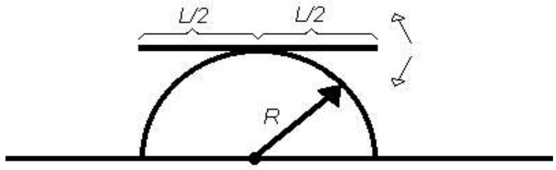
ZADANIE T3

Nazwa zadania: „Drgająca deseczka”

Na nieruchomym, poziomym półwalcu o promieniu R umieszczono jednorodną, cienką, płaską deskę o długości L (rys. 20). Deska jest oparta o walec w swym środku geometrycznym i jest prostopadła do osi półwalca. Deskę wprawiono w drgania w płaszczyźnie prostopadłej do osi walca w taki sposób, że między deską a powierzchnią walca nie ma poślizgu.

a) Wykaż, że dla małych amplitud drgania te są drganiami harmonicznymi i wyznacz ich okres.

b) Wyznacz minimalny współczynnik tarcia *f* prętem a półwalcem, przy którym możliwe są drgania bez poślizgu o amplitudzie kątowej θ .



Rys. 20

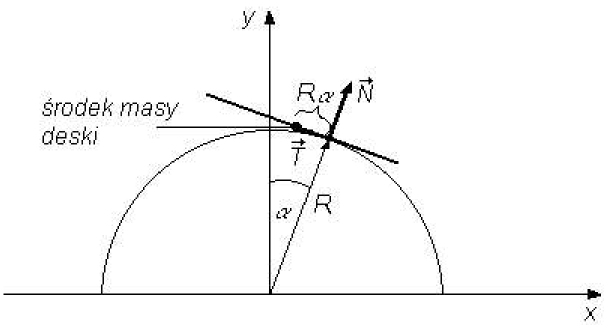
ROZWIĄZANIE ZADANIA T3

Współrzędne środka masy deski (rys.21)wynoszą:

$$x_0 = r\sin\alpha - \alpha R\cos\alpha$$

$$y_0 = R\cos\alpha = \alpha R\sin\alpha$$

Rys.21



Przyspieszenie środka masy jest zatem równe:

$$\ddot{x}_0 = R(\sin\alpha + \alpha\cos\alpha)\dot{\alpha}^2 + R\alpha\sin\alpha\ddot{\alpha}$$

$$\ddot{y}_0 = R(\cos\alpha - \alpha\sin\alpha)\dot{\alpha}^2 + R\alpha\cos\alpha\ddot{\alpha}$$

Kropką oznaczono tu różniczkowanie po czasie, dwoma kropkami różniczkowanie dwukrotne po czasie.

Niech $\vec{N}$ oznacza reakcję półwalca, a $\vec{T}$-tarcie w punkcie podparcia. Równania ruchu mają postać:

1) $m\ddot{x}_0 = N\sin\alpha - T\cos\alpha$

2) $m\ddot{y}_0 = N\cos\alpha + T\sin\alpha - mg$

3) $I\ddot{\alpha} = -NR\alpha$

I oznacza tu moment bezwładności deski względem punktu podparcia, a m -jej masę. Ponieważ $N \sim mg$,więc $\dot{\alpha} \sim \ddot{\alpha} \sim \alpha$ .W najniższym rzędzie względem α równania te redukują się do

4) 0= $-T$,
5) 0= $N - mg$,
6) $I\ddot{\alpha} = -NR\alpha$,

stąd $I\ddot{\alpha} = -mgR\alpha$; $I = \frac{1}{12}mL^2$.

Jest to równanie drgań harmonicznych. Szukany okres drgań wynosi:

$$T = \pi L\sqrt{\frac{1}{3Rg}}.$$

Równania : pierwsze i trzecie w punkcie zwrotnym $\alpha = \theta$ mają postać($\dot{\alpha} = 0$)

$$mR\theta\sin\theta\ddot{\alpha} = N\sin\theta - T\cos\theta \ ,$$
$$I\ddot{\alpha} = -NR\theta \ ,$$

stąd

$$\frac{T}{N} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\left[1 + \frac{mR^2}{I}\theta^2\right].$$

Zatem minimalny współczynnik tarcia

$$f = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\left[1 + \frac{mR^2}{I}\theta^2\right].$$

Zadanie powyższe okazało się zadaniem dość trudnym przede wszystkim ze względów rachunkowych.

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk OF”

Komitet Okregowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl