

XXVII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP I

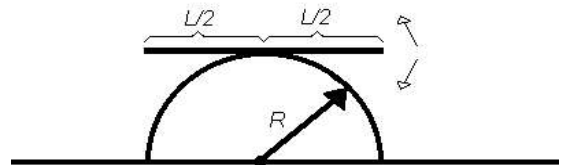
Zadania teoretyczne

ZADANIE T3

Nazwa zadania: „Drgająca deseczka”

Na nieruchomym, poziomym półwalcu o promieniu R umieszczono jednorodną, cienką, płaską deskę o długości L (rys. 20). Deska jest oparta o walec w swym środku geometrycznym i jest prostopadła do osi półwalca. Deskę wprowadzono w drgania w płaszczyźnie prostopadłej do osi walca w taki sposób, że między deską a powierzchnią walca nie ma poślizgu.

- a) Wykaż, że dla małych amplitud drgania te są drganiami harmonicznymi i wyznacz ich okres.
- b) Wyznacz minimalny współczynnik tarcia f prętem a półwalcem, przy którym możliwe są drgania bez poślizgu o amplitudzie kątowej θ .



Rys. 20

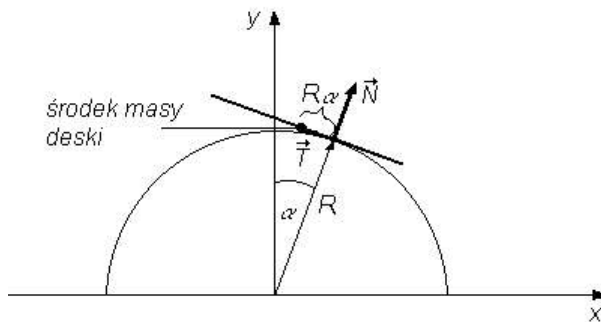
ROZWIĄZANIE ZADANIA T3

Współrzędne środka masy deski (rys.21) wynoszą:

$$x_0 = r \sin \alpha - \alpha R \cos \alpha$$

$$y_0 = R \cos \alpha = \alpha R \sin \alpha$$

Rys.21



Przyspieszenie środka masy jest zatem równe:

$$\ddot{x}_0 = R(\sin \alpha + \alpha \cos \alpha) \dot{\alpha}^2 + R \alpha \sin \alpha \ddot{\alpha}$$

$$\ddot{y}_0 = R(\cos \alpha - \alpha \sin \alpha) \dot{\alpha}^2 + R \alpha \cos \alpha \ddot{\alpha}$$

Kropką oznaczono tu różniczkowanie po czasie, dwoma kropkami różniczkowanie dwukrotne po czasie.

Niech \vec{N} oznacza reakcję półwalca, a \vec{T} - tarcie w punkcie podparcia. Równania ruchu mają postać:

$$1) m \ddot{x}_0 = N \sin \alpha - T \cos \alpha$$

$$2) m \ddot{y}_0 = N \cos \alpha + T \sin \alpha - mg$$

$$3) I \ddot{\alpha} = -NR \alpha$$

I oznacza tu moment bezwładności deski względem punktu podparcia, a m - jej masę. Ponieważ $N \sim mg$, więc $\ddot{\alpha} \sim \ddot{\alpha} \sim \alpha$. W najniższym rzędzie względem α równania te redukują się do

- 4) $0 = -T$,
- 5) $0 = N - mg$,
- 6) $I\ddot{\alpha} = -NR\alpha$,

stąd
$$I\ddot{\alpha} = -mgR\alpha; \quad I = \frac{1}{12}mL^2.$$

Jest to równanie drgań harmoniczných. Szukany okres drgań wynosi:

$$T = \pi L \sqrt{\frac{1}{3Rg}}.$$

Równania : pierwsze i trzecie w punkcie zwrotnym $\alpha = \theta$ mają postać ($\dot{\alpha} = 0$)

$$mR\theta \sin\theta \ddot{\alpha} = N \sin\theta - T \cos\theta ,$$

$$I\ddot{\alpha} = -NR\theta ,$$

stąd

$$\frac{T}{N} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \left[1 + \frac{mR^2}{I} \theta^2 \right].$$

Zatem minimalny współczynnik tarcia

$$f = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \left[1 + \frac{mR^2}{I} \theta^2 \right].$$

Zadanie powyższe okazało się zadaniem dość trudnym przede wszystkim ze względów rachunkowych.

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk OF”

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl