

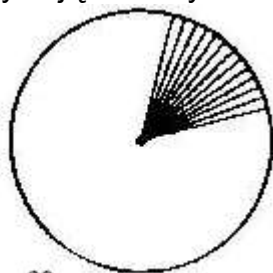
XXVIII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP I

Zadania teoretyczne

ZADANIE T1

Nazwa zadania: „Bryła sztywna”

Wyznacz moment bezwładności jednorodnego trójkąta o boku a , b , c i masie m względem osi prostopadłej do jego płaszczyzny i przechodzącej przez środek masy. Korzystając z otrzymanego wyniku, oblicz moment bezwładności jednorodnego koła o promieniu r i masie m względem osi symetrii. (koło należy tu potraktować jako zbiór bardzo dużej liczby „trójkątów” pokazanych na rys. 69).



Rys. 69

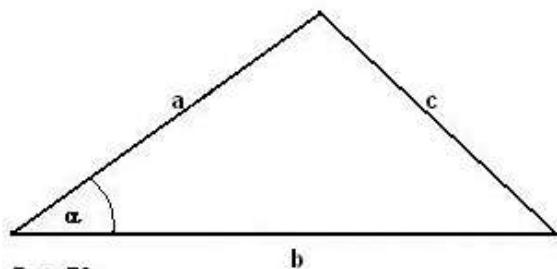
ROZWIĄZANIE ZADANIA T1

Znajomość a , b i α całkowicie wyznacza trójkąt. Zatem moment bezwładności trójkąta względem środka masy (leżącego na przecięciu środkowym) musi mieć postać

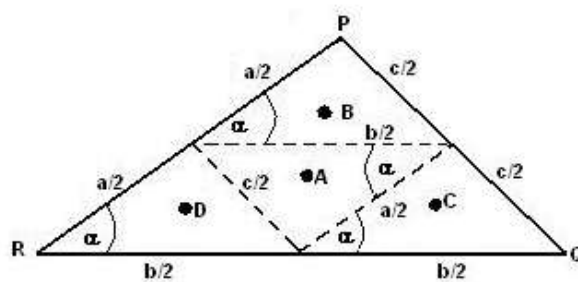
$$I = Kma^2 f(b/a, \alpha).$$

gdzie K jest nieznaną stałą, a $f(b/a, \alpha)$ – nieznaną funkcją dwu zmiennych: stosunku b/a i kąta α . Jest to najogólniejsza postać wyrażenia o wymiarze momentu bezwładności, jaką można zbudować z a , b i α (rys. 70).

Podzielimy trójkąt na mniejsze przystające wzajemnie trójkąty o dwa razy mniejszych bokach, tak jak na rysunku 71. Zgodnie z twierdzeniem Steinera mamy:



Rys. 70



Rys. 71

$$I = 4I_1 + \frac{m}{4} AB^2 + \frac{m}{4} AC^2 + \frac{m}{4} AD^2. \quad (1)$$

gdzie I_1 jest momentem bezwładności każdego z mniejszych trójkątów względem własnego środka masy. Mamy więc

$$I_1 = \frac{1}{16} Kma^2 f(b/a, \alpha).$$

AB jest $\frac{1}{3}$ środkowej m_P wychodzącej z punktu **P** (punktu przecięcia środkowych dzieli je w stosunku 1:2). Podobnie $AC = \frac{1}{3}m_Q$ i $AD = \frac{1}{3}m_R$. Mamy też ze wzoru na długość środkowej trójkąta

$$m_P^2 = \frac{1}{2}(a^2 + c^2) - \frac{1}{4}b^2,$$

$$m_Q^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2) - \frac{1}{4}a^2,$$

$$m_R^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{1}{4}c^2.$$

Uwzględniając powyższe zależności można napisać wzór (1) w następującej postaci

$$Kma^2 f(b/a, \alpha) = \frac{1}{4}Kma^2 f(b/a, \alpha) + \frac{m}{4} \frac{1}{12}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Stąd

$$Ka^2 f(b/a, \alpha) = \frac{1}{36}(a^2 + b^2 + c^2),$$

zatem

$$I = \frac{1}{36}m(a^2 + b^2 + c^2).$$

Dla bardzo „wąskiego” trójkąta równobocznego o masie **dm**, kącie rozwarcia **dα** i bokach doń przyległych równych **r**, mamy $dI' = \frac{1}{18}r^2 dm$. Jest to moment bezwładności tego trójkąta względem środka masy leżącego w odległości $\frac{2}{3}r$ od wierzchołka kąta **dα**. Względem osi przechodzącej przez ten wierzchołek.

$$dI = dI' + dm \left(\frac{2}{3}r \right)^2 = \frac{1}{2}r^2 dm$$

ale $dm = \frac{m}{2\pi} d\alpha$, gdzie **m** jest masą koła.

Wobec tego

$$dI = \frac{1}{2}r^2 m \frac{d\alpha}{2\pi}$$

Całkując od zera do 2π dostaniemy $I = \frac{1}{2}mr^2$

(brak punktacji)