XXVIII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP III
Zadanie teoretyczne

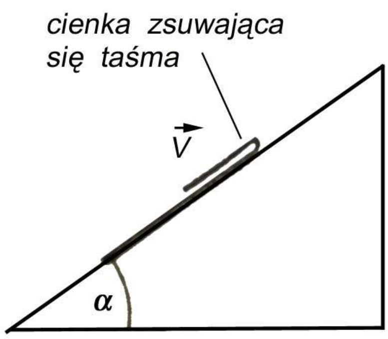
ZADANIE T2

Nazwa zadania: „Zsuwanie się taśmy z równi”

Na równi pochyłej o kącie nachylenia α leży cienka, nierozciągliwa, doskonale wiotka taśma. Strona taśmy zwrócona do równi jest wystarczająco chropowata, by taśma nie zsuwała się po równi, zaś jej strona górna jest idealnie gładka, tak że po zagięciu bardzo małego kawałka w górnym końcu taśmy rozpoczyna się jej zsuwanie po sobie samej - rysunek 96.

1) Zakładając, że ruch końca taśmy jest jednostajnie przyspieszony, oblicz wartość przyspieszenia *a*,

2) Oblicz ilość ciepła, jaka wydzieliła się w ruchomej (zagiętej) części taśmy do chwili, w której jej energia kinetyczna osiągnęła wartość E_k. (Przyjmujemy, że do tego momentu zsunęło się mniej niż pół długości taśmy).



Rys. 96

ROZWIĄZANIE ZADANIA T2

W czasie *dt* do ruchu dołącza się część taśmy o długości *dx.* Jasne jest, że

$$v = 2\frac{dx}{dt}.$$

Niezrównoważoną siłą powodującą ruch jest składowa styczna siły ciężkości zagiętego odcinka taśmy o długości *x.* Masę tego odcinka oznaczmy przez. *m.* Wartość rozważanej składowej stycznej wynosi oczywiście $mg\sin\alpha$.

Z II zasady dynamiki mamy

$$mg\sin\alpha = \frac{dp}{dt},$$

gdzie *p* oznacza pęd układu. Mamy

$$p = mv,$$

gdzie *v* oznacza prędkość zsuwającej się części taśmy.

Zatem

$$mg\sin\alpha = m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}.$$

Ze względu na jednorodność taśmy mamy

$$\frac{dm}{m} = \frac{dx}{x},$$

a więc

$$g\sin\alpha = \frac{dv}{dt} + \frac{v}{x}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dt} + \frac{1}{2}\frac{v^2}{x}.$$

Zgodnie z treścią zadania nie szukamy ogólnego rozwiązania otrzymanego równania; interesuje nas bowiem tylko rozwiązanie odpowiadające ruchowi jednostajnie przyspieszonemu. Sprawdźmy, czy takie rozwiązanie istnieje. Innymi słowy, załóżmy że

$$v = at, \tag{1}$$

$$x = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}at^2 \tag{2}$$

i spróbujmy wyznaczyć *a.* Jeżeli okaże się, że można znaleźć takie stałe *a,* że *x(t)* dane wzorem (2) będzie dobrym rozwiązaniem, to wszystko będzie w porządku. Jeżeli zaś nie, to by oznaczało, że coś z treścią zadania jest nie tak. Na szczęście po wstawieniu wzorów (1) i (2) do otrzymanego poprzednio równania dostajemy

$$g\sin\alpha = a + \frac{1}{2}\frac{a^2t^2}{\frac{1}{4}at^2} = 3a.$$

Stąd
$$a = \frac{1}{3}g\sin\alpha.$$

Zwróćmy uwagę, że zgodnie z wzorami (1) i (2) dla *t =0* mamy

$$v(0) = 0,$$

$$x(0) = 0.$$

Oznacza to, że taśma będzie zsuwać się ruchem jednostajnie przyspieszonym wtedy, gdy początkowo odwinie się infinitezymalnie mały kawałek taśmy, który będzie zsuwać się swobodnie bez prędkości początkowej. Gdyby początkowo odwinięty bardzo mały kawałek taśmy miał prędkość różną od zera, ruch taśmy byłby opisany inną funkcją *x(t)* niż wyżej znaleziona.

Teraz znajdziemy odpowiedź na drugie z pytań. Zmiana energii potencjalnej wynosi

$$-mgx\sin\alpha,$$

zmiana zaś energii kinetycznej jest równa

$$\frac{1}{2}mv^2.$$

Całkowita zmiana energii mechanicznej jest zatem dana wzorem

$$\Delta E_{mech} = -mgx\sin\alpha + \frac{1}{2}mv^2;$$

ale
$$gx\sin\alpha = 3ax = \frac{3}{4}a^2t^2 = \frac{3}{4}v^2.$$

Wobec tego

$$\Delta E_{mech} = -\frac{1}{4} m v^2 = -\frac{1}{2} E_k .$$

Zmiana energii mechanicznej jest spowodowana stratami na ciepło. Tak więc podczas zsuwania się taśmy wydzieli się ciepło Q równe $\frac{1}{2} E_k$. Taśma przy zsuwaniu powinna się ogrzewać. Należy jednak zwrócić uwagę, że nie jest to wywołane tarciem. Po prostu każdy kawałek taśmy rozpoczynający swój ruch w pewny sensie ulega zderzeniu niesprężystemu z tą częścią taśmy, która już się poruszała, a podczas zderzeń niesprężystych energia kinetyczna się nie zachowuje.

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk OF” XXVII-XXVIII

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl