

XXX OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP III

Zadanie doświadczalne

ZADANIE D1

Nazwa zadania: „Maszyna analogowa.”

Dane są:

1. dioda półprzewodnikowa (krzemowa)
2. opornik dekadowy ($1 \cdot 10^5 \Omega$),
3. woltomierz cyfrowy,
4. źródło napięcia stałego ok. 2V z układem potencjometrów do precyzyjnej regulacji,
5. przełącznik,
6. przewody do połączeń,
7. papier logarytmiczny

Zaprojektuj i zestaw z danych elementów układ elektryczny – „maszynę analogową” – umożliwiającą znajdowanie rozwiązania równania przestępnego

$$x = 10^{Ax}.$$

Rozwiąż przy pomocy tej „maszyny” powyższe równanie dla kilku wybranych przez siebie wartości A i sprawdź jaka jest dokładność otrzymywanych rozwiązań. Przedyskutuj zakres wartości A , dla którego „maszyna” zestawiona z danych elementów może spełniać swoje zadanie.

Wskazówka: W pewnym przedziale wartości, zależność między prądem i płynącym przez diodę, a napięciem U do niej przyłożonym, opisuje zależność wykładnicza:

$$i = i_0 10^{\frac{u}{U_0}},$$

gdzie i_0 , U_0 - są parametrami charakteryzującymi daną diodę. Parametry te zależą silnie od temperatury.

Uwaga: nie należy dopuszczać, by prąd płynący przez diodę przekraczał 10 mA.

Do zadania dołączono dwie informacje: o połączeniu i działaniu układu potencjometrów, pozwalającym na bardzo precyzyjną regulację napięcia zasilającego, oraz o działaniu i sposobie obsługi woltomierza cyfrowego.

ROZWIĄZANIE ZADANIA D1

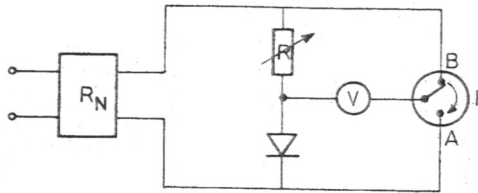
W celu uzyskania możliwości rozwiązania danego równania należy najpierw wyznaczyć charakterystykę prądowo-napięciową diody. Jak sugeruje wskazówka do zadania, w pewnym przedziale wartości, zależność pomiędzy prądem i płynącym przez diodę a napięciem U do niej przyłożonym ma postać:

$$i = i_0 10^{\frac{u}{U_0}}, \quad (1)$$

bardzo zbliżoną do postaci równania, którego rozwiązania szukamy¹⁾.

Koniecznym jest więc wykonanie charakterystyki diody, oraz zbadanie dla jakich przedziałów zależność (1) jest słuszna i jakie są wartości współczynników U_0 oraz i_0 .

Z podanych przyrządów zestawiamy układ przedstawiony na rys.11 gdzie: R_N - precyzyjny regulator napięcia, R - opornik dekadowy, P - przełącznik, V - woltomierz cyfrowy



Rys. 11

W obwód diody włączono szeregowo opornik dekadowy o zmiennym regulowanym oporze R , natomiast woltomierz cyfrowy w zależności od położenia przełącznika P może mierzyć spadek napięcia bądź na diodzie, bądź na oporniku dekadowym, co umożliwi wyznaczenie prądu płynącego przez diodę. Użycie woltomierza cyfrowego ze względu na jego bardzo duży opór wewnętrzny (dla zakresu $\leq IV$ opór wewnętrzny rzędu setek megaomów) umożliwi praktycznie bezprądowy pomiar napięcia tzn. nie zakłóca przepływu prądu w obwodzie diody.

Oznaczmy: U_A - napięcie mierzone na diodzie, (wyłącznik w położeniu A), U_B - napięcie mierzone na oporze (wyłącznik w położeniu B), R - wartość oporu na oporniku dekadowym, i - prąd płynący przez diodę.

W tabeli I podajemy wyniki pomiarów oraz obliczenia uzyskane przez jednego z zawodników.

¹⁾ Warto zauważyć, że dla diody półprzewodnikowej słuszna jest zależność:

$$i = i_0 (e^{\frac{\varepsilon U}{nkT}} - 1),$$

gdzie: i - prąd płynący przez diodę, U - napięcie przyłożone na diodzie, i_0 - prąd nasycenia w kierunku zaporowym, ε - ładunek elementarny, k - stała Boltzmanna, T - temperatura bezwzględna, n - współczynnik związany z generacją i rekombinacją ładunku w obszarze złącza. Współczynnik ten ma wartość $1 \leq n \leq 2$, e - podstawa logarytmu naturalnego $e = 2,71828$.

Logarytmując stronami:

$$\log \left(\frac{i}{i_0} + 1 \right) = \frac{\varepsilon U}{nkT} \log e,$$

Przy założeniu, że: $\frac{i}{i_0} \gg 1$ oraz oznaczając $\frac{1}{U_0} = \frac{\epsilon}{nkT} \log e$ otrzymujemy postać równania (1).

Tabela I

$U_A(V)$	$U_B(V)$	$R(k\Omega)$	$i(mA)$
0,650	2,508	1	2,508
0,600	0,9140	1	0,9140
0,550	0,3106	1	0,3106
0,500	0,1022	1	0,1022
0,450	0,0344	1	0,0344
0,400	0,0117	1	0,0117
0,350	$4,25 \cdot 10^{-3}$	1	$4,25 \cdot 10^{-3}$
0,300	$1,57 \cdot 10^{-3}$	1	$1,57 \cdot 10^{-3}$
0,250	$0,59 \cdot 10^{-3}$	1	$0,59 \cdot 10^{-3}$
0,200	$2,2 \cdot 10^{-3}$	10	$0,22 \cdot 10^{-3}$
0,150	$0,75 \cdot 10^{-3}$	10	$0,075 \cdot 10^{-3}$
0,100	$0,23 \cdot 10^{-3}$	10	$0,023 \cdot 10^{-3}$
0,050	$0,77 \cdot 10^{-3}$	100	$7,7 \cdot 10^{-5}$

Pomiary były wykonane trzy krotnie, i wyniki były doskonale powtarzalne. Wszystkie punkty leżą na jednej prostej:

$$i = i_0 10^{\frac{U}{U_0}},$$

$$\log i = \log i_0 + \frac{U}{U_0} = C + D * U.$$

Metodą najmniejszych kwadratów wyznaczono:

$$C = -5,535,$$

$$D = 9,117.$$

Ale $C = \log i_0 \Rightarrow i_0 = 2,917 * 10^{-6} \text{ mA}$.

$$D = \frac{1}{U_0} \Rightarrow U_0 = 0,1097 \text{ V}.$$

Można więc równanie mierzonej diody zapisać następująco:

$$i = 2,917 * 10^{-6} * 10^{\frac{U}{0,1097}}.$$

Przyjmując, że pomiary napięcia przy użyciu woltomierza cyfrowego przeprowadzone są z dokładnością $>0,1\%$ można oszacować błąd wyznaczenia U_0

oraz i_0 na ok.0,2%. Oczywiście błąd ΔU_0 oraz Δi_0 można obliczyć metodą najmniejszych kwadratów.

Zauważmy, że równanie (1) zgodnie z przyjętymi oznaczeniami można przekształcić:

$$\frac{U_B}{R} = i_0 10^{\frac{UA}{U_0}}, \quad \text{skąd } U_B = Ri_0 10^{\frac{UA}{U_0}}.$$

Gdy tak dobierzemy napięcie zasilania, aby np. $U_A = U_B = U$, wtedy:

$$U = Ri_0 * 10^{\frac{U}{U_0}}.$$

Oznaczając:

$$x = \frac{U}{Ri_0}$$

Otrzymamy:

$$x = 10^{\frac{Ri_0 x}{U_0}}; \quad A = \frac{Ri_0}{U_0}.$$

A musi być takie aby:

a) R zawierało się w przedziale:

$$\langle 1\Omega, 100k\Omega \rangle,$$

ale $i_0 = 2,917 * 10^{-6}$ mA oraz $U_0 = 0,1097$ V, a więc A musi być z przedziału:

$$\langle 2,7 * 10^{-8}, 2,7 * 10^{-3} \rangle$$

b) U musi być z przedziału:

$$\langle 0,05 \text{ V}, 0,65 \text{ V} \rangle.$$

Na przykład:

$$A = 10^{-3} \Rightarrow R = \frac{10^{-3} * 0,1097}{2,917 * 10^{-6}} (\text{k}\Omega) = 37607(\Omega)$$

Szukamy napięcia $U_A = U_B = U$, tzn. takiego napięcia na woltomierzu cyfrowym, by przy zmianie przełącznika P (z położenia A do położenia B) zmienił się jedynie znak (z „+” na „-”). Po kilku próbach otrzymano:

$$U = 0,3926 \text{ V} \Rightarrow *x = \frac{0,3926}{37,607 * 2,917} * 10^6 = 3579$$

Sprawdzenie: $10^{3,579} = 3793$.

Jeżeli ustawimy napięcia tak aby:

$$U_B = 0,1U_A \text{ lub } U_B = 0,01U_A,$$

Wtedy możemy rozszerzyć zakres A do $2,7 * 10^{-2}$ lub nawet do $2,7 * 10^{-1}$, ale oczywiście otrzymujemy dużo mniej dokładne wyniki i równanie spełnione jest z dużym przybliżeniem.

Tabela II

	A	R	U	x	10^{Ax}	$x/10^{Ax}$	
$U_A = U_B = U$	$1 \cdot 10^{-5}$	376	0,6159	561 547	412 542	1,361	
	$1 \cdot 10^{-4}$	3 761	0,5120	46 669	46 440	1,005	
	$2 \cdot 10^{-4}$	7 521	0,4765	21 720	22 076	0,984	
	$3 \cdot 10^{-4}$	11 282	0,4567	13 877	14 562	0,9530	
	$4 \cdot 10^{-4}$	15 043	0,4416	10 064	10 450	0,9631	
	$5 \cdot 10^{-4}$	18 804	0,4286	7 814	8 071	0,9682	
	$6 \cdot 10^{-4}$	22 564	0,4154	6 311	6 120	1,0312	
	$1 \cdot 10^{-3}$	37 607	0,3926	3 579	3 793	0,944	
	$0,1 U_A = U_B = U$	$1 \cdot 10^{-2}$	37 607	0,2507	228,5	192,9	1,185
	$0,01 U_A = U_B = U$	$1 \cdot 10^{-1}$	37 607	0,094	8,37	7,19	1,192

Oczywiście z powyższej tabelki widać, że dokładność rozwiązań (ostatnia kolumna tabeli) dla skrajnych A jest dużo mniejsza.

W tabeli II zestawiono uzyskane wyniki dla różnych wartości A, przy różnych ustawieniach napięć.

Zadanie to okazało się zadaniem trudnym, wielu zawodników nie umiało poradzić sobie z problemem. Kłopoty sprawiło już zestawienie obwodu, a następnie zrobienie charakterystyki. Były prace gdzie robiono charakterystykę dla 2-3 punktów i to bliskich sobie, a przecież należało sprawdzić w jakim zakresie napięć i prądów charakterystyka ma przebieg prostoliniowy i dawało się sprawdzić w bardzo szerokim zakresie prądów:

$$7 \cdot 10^{-5} < i < 2,5 \text{ mA.}$$

Kilka prac było w pełni dojrzałych, nie tylko z prawidłową charakterystyką, wyliczonymi metodą najmniejszych kwadratów współczynnikami prostej, ale również pełną dyskusją rozwiązań równania jak i zakresu parametrów. Uzyskały one ocenę powyżej 30p. (na 40 możliwych). Laureat III miejsca uzyskał wyróżnienie za rozwiązanie zadania uzyskując maksymalną liczbę punktów.

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk OF”

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl