

# XXXII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP I

## Zadanie doświadczalne

### ZADANIE D1

Nazwa zadania: „Wyznaczanie masy lejka i ciężarka”

Zestaw doświadczalny:

1. lejek,
2. płaska szyba,
3. metalowy ciężarek,
4. menzurka,
5. naczynie z wodą,
6. kuweta lub taca (chroni przed zalaniem pracowni),
7. papier milimetrowy,
8. klej (do przyklejenia papieru milimetrowego).

Wyznacz masę lejka oraz ciężarka (gęstości ciężarka i lejka są nieznane. Gęstość wody wynosi  $1\text{g/cm}^3$ ).

### ROZWIĄZANIE ZADANIA D1

Do doświadczenia przygotowano lejek szklany o średnicy przy podstawie około 10cm (masa lejka około 100g), szklaną płytkę o wymiarach około 15cm x 15cm, ciężarek z otworem o masie ok. 50g (np. nakrętka o takiej średnicy wewnętrznej, żeby weszła na rurkę lejka). Powierzchnia krawędzi górnej lejka była doszlifowana proszkiem w taki sposób, aby lejek położony na szybie dał się napełnić wodą do pewnego określonego poziomu.

Lejek stawiamy na poziomej szybie i zaczynamy powoli wypełniać go wodą. Woda wywiera na podłoże parcie, które rośnie wraz ze wzrostem wysokości słupa wody zawartej w lejku. Przy pewnym poziomie wody  $h$ , obserwujemy płynięcie lejka spowodowane silnym zmniejszaniem oporu ruchu lejka po podłożu — znika tarcie między lejkiem a płytką. Przy odpowiednim doszlifowaniu krawędzi lejka wartość  $h$  jest dobrze określona.

Wtedy suma ciężaru lejka i ciężaru zawartej w nim wody równa jest całkowitemu parciu wody na powierzchni podstawy lejka.

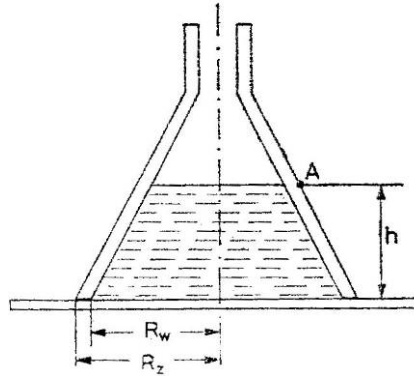
Parcie  $Q$  na całej wewnętrznej powierzchni podstawy lejka równe jest iloczynowi ciśnienia wody  $p_w$  przez powierzchnię:

$$Q = p_w \cdot R_w^2 \pi \quad (1)$$

gdzie  $R_w$  — promień wewnętrznej podstawy lejka (rys. 6). Ciśnienie na tej powierzchni wynosi

$$p_w = \rho_w \cdot g \cdot h \quad (2).$$

gdzie:  $\rho_w$  — gęstość wody,  $g$  — przyspieszenie -ziemskie,  $h$  ~ wysokość słupa wody w lejku, przy której następuje „płynięcie” lejka.



Jeżeli założymy, że pod brzegiem lejka wzdłuż promienia jego podstawy od  $R_w$  do  $R_z$  ciśnienie zmienia się liniowo od wartości  $p_w$  do zera, to dodatkowe parcie wody ( $Q'$ ) między brzegiem lejka a płytką będzie wynosiło:

$$Q' = (\pi R_z^2 - \pi R_w^2) \frac{P_w}{2} \quad (3)$$

Całkowite parcie wody na powierzchnię podstawy lejka wynosi więc  $Q + Q'$  i równe jest sumie ciężarów: lejka  $P_L$  i zawartej w nim wody  $P_w$  stąd:

$$Q + Q' = P_L + P_w \quad (4)$$

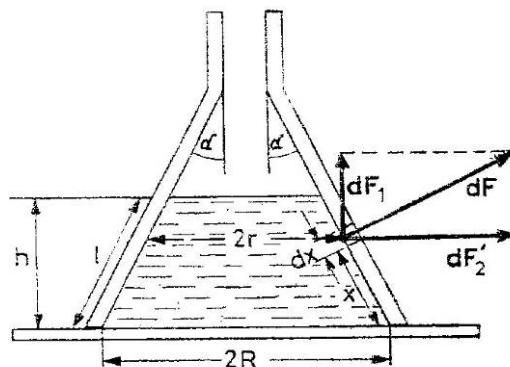
Korzystając z zależności (1) (2) (3) otrzymamy:

$$\left[ \pi R_w^2 + \left( \frac{\pi R_z^2}{2} - \frac{\pi R_w^2}{2} \right) \right] \rho_w g h = P_L + P_w$$

$$P_L = \pi \rho_w g h \cdot \left( \frac{R_z^2 + R_w^2}{2} \right) - P_w$$

Do innej metody otrzymania wzoru na wyznaczenie ciężaru lejka, przy zastosowaniu danego układu pomiarowego, prowadziło stwierdzenie, że w momencie pływania lejka, przy pewnej wysokości  $h$  wody zawartej w lejku, składowa pionowa siły parcia wywieranego przez wodę zrównoważy ciężar lejka. (Składowe poziome siły parcia równoważą się ze względu na symetrię układu). Należało więc obliczyć składową pionową siły i parcia wywieranego przez wodę na element  $ds$  ścianki lejka i scałkować po całej powierzchni lejka.

Przyjmijmy oznaczenia jak na ryc. 7.



Rozpatrujemy element powierzchni lejka o szerokości  $dx$ , położony w odległości  $x$  (liczonej wzdłuż tworzącej stożka) od krawędzi lejka przylegającej do szyby.

Całkowite parcie wody na ten element powierzchni wynosi:

$$dF = p \cdot ds \quad (6)$$

gdzie:  $p$  — ciśnienie słupa wody na wysokości  $(l-x) \cos \alpha$ ,  $ds$  — element powierzchni. Ponieważ ciśnienie  $p$  wynosi:

$$p = \rho_w g (l-x) \cos \alpha \quad (7)$$

element powierzchni wynosi

$$ds = 2\pi r dx, \text{ gdzie: } r = R - x \cdot \sin \alpha$$

więc:

$$dF = \rho_w g (l-x) \cos \alpha \cdot 2\pi (R - x \cdot \sin \alpha) dx$$

a składowa pionowa tej siły  $dF_1$  wynosi:

$$\begin{aligned} dF_1 &= dF \cdot \sin \alpha = \\ &= 2\pi \rho_w g (l-x) \cos \alpha (R - x \cdot \sin \alpha) \cdot \sin \alpha \cdot dx \end{aligned}$$

Całkowita wartość składowej pionowej siły parcia wody na ściankę lejka wynosi wobec tego:

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_0^l dF_1 = 2\pi \rho_w g \cos \alpha \sin \alpha \int_0^l (R - x \cdot \sin \alpha) \cdot (l-x) dx = \\ &= 2\pi \rho_w g \cos \alpha \cdot \sin \alpha \left[ \int_0^l R l dx - \int_0^l (R + l \sin \alpha) x dx + \int_0^l \sin \alpha x^2 dx \right] = \\ &= 2\pi \rho_w g \cos \alpha \cdot \sin \alpha \left[ R l^2 - (R + l \sin \alpha) \frac{l^2}{2} + \sin \alpha \frac{l^3}{3} \right] = \\ &= 2\pi \rho_w g \cos \alpha \cdot \sin \alpha \left[ \frac{R l^2}{2} - \frac{1}{6} l^3 \sin \alpha \right] \end{aligned}$$

Zgodnie z poprzednimi rozważaniami  $F_1 = P_L$ . Stąd:

$$P_L = \pi \rho_w g \cdot \sin \alpha \cos \alpha \cdot l^2 \left[ R - \frac{1}{3} l \sin \alpha \right]$$

Łatwo sprawdzić, że wzór ten jest równoważny wzorowi (5) przy założeniu, że  $R_z = R_w$ , tzn. przy zaniedbaniu grubości ścianek lejka.

Najczęstsze błędy popełniane przez zawodników, stosujących tę metodę wyprowadzenia wzoru to:

1. Wstawianie do wzoru na ciśnienie wody odległości elementu  $ds$  od poziomu płytki, a nie od poziomu cieczy.
2. Przy obliczaniu składowej pionowej siły parcia mnożenie „średniego” ciśnienia na powierzchni lejka przez powierzchnię boczną lejka. Takie postępowanie jest błędne, ponieważ jak widać z poprzednio wyprowadzonych wzorów, zależność  $dF$  od wysokości  $h$  nie jest liniowa.
3. Niezauważenie, że promień  $r$  elementu powierzchni  $ds$ , nie jest stały, ale zależy od  $x$ , wobec czego całkowanie z  $r = R$  jako stałą.
4. Liczne omyłki przy rozwiązywaniu trójkątnych prostokątnych m.in. mylenie funkcji trygonometrycznych.

## 5. Błędy w całkowaniu.

Oznaczając masę lejka przez  $M_l$  otrzymujemy

$$M_L = \pi \rho_w \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot l^2 \left[ R - \frac{1}{3} l \sin \alpha \right]$$

lub zgodnie z wzorem (5) oraz z zależnością  $h = l \cos \alpha$  otrzymamy:

$$M_L = \pi \rho_w l \cdot \cos \alpha \left( \frac{R_w^2 + R_z^2}{2} \right) - \frac{P_w}{g}$$

Wzór (11) lub (12) pozwala wyznaczyć masę lejka i masę układu lejek + ciężarek na podstawie pomiaru długości  $l$  oraz parametrów lejka tzn.  $R$  oraz kąta  $\alpha$  lub pomiaru masy wody.

Wielkości  $l$ ,  $R_w$ ,  $R_z$  mierzono przy pomocy papieru milimetrowego. Aby ułatwić odczytanie poziomu cieczy na lejku naklejono wzdłuż tworzącej stożka pasek papieru milimetrowego spełniający rolę skali. Wewnętrzny i zewnętrzny promień krawędzi lejka łatwo było zmierzyć odciskając zwilżony lejek na papierze milimetrowym.

Kąt  $\alpha$  wyznaczano z pomiaru promienia i tworzącej części stożkowej lejka. Najskuteczniejszą metodą było zwinięcie stożka (nie ściętego) z papieru milimetrowego i wpasowanie go do wewnętrznej części lejka. Kąt  $\alpha$  wyznaczano również poprzez pomiar objętości  $V$  cieczy wypełniającej całkowicie „kielich” lejka zgodnie z zależnością

$$V = \frac{1}{3} \pi R^3 \operatorname{ctg} \alpha$$

stąd:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3V}{\pi R^3}$$

Masę wody ( $P_w/g$ ) wyznaczono odmierzając odpowiednio objętość wody menzurką. Najłatwiej to wykonać w następujący sposób:

Trzymając lejek podstawą do góry i zatykając wylot palcem napełniamy lejek do punktu A (widocznego na rys. 6), a następnie mierzymy objętość wody potrzebną do napełnienia lejka po brzegi.

Opisane powyżej metody opierają się na obserwacji tego samego zjawiska i różnią się szczegółami otrzymywania odpowiednich wzorów lub wyborem mierzonych wielkości.

Źródło:  
Zadanie pochodzi z czasopisma „Fizyka w Szkole” 3/1983

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie  
[www.of.szcz.pl](http://www.of.szcz.pl)