XXXIII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP III
Zadanie teoretyczne

ZADANIE T2

Nazwa zadania:
Dany jest układ *n* oporników R_i połączonych w określony sposób. Wykaż, że opór zastępczy rozważanego układu jest niemalejącą funkcją każdej z wartości R_i .

ROZWIAZANIE ZADANIA T2

Nie trudno zauważyć, że powyższe zadanie łatwo sprowadzić do zadania następującego:
Do dowolnej sieci oporników omowych z dopływem prądu w punkcie *A* i odpływem w punkcie *B* dołączono dowolną ilość dodatkowych oporników. Udowodnij, że w wyniku takiej operacji opór R_{AB} nie mógł wzrosnąć.
Badanie oporu łatwo sprowadzić do badania mocy wydzielanej w układzie:

$$M = \frac{(U_B - U_A)^2}{R_{AB}},$$

gdzie U_A i U_B są ustalonymi potencjałami w punktach *A* i *B.* Jeżeli udowodnimy, że po dołączeniu dodatkowych oporników moc nie zmaleje, to tym samym udowodnimy, że opór nie wzrośnie.
Moc wydzielana po dołączeniu oporów składa się z dwóch części – mocy wydzielanej na nowych opornikach i mocy wydzielanej na opornikach starej sieci, ale przy nowych napięciach w jej węzłach.
Wprowadzimy oznaczenia:
I=0,1,2,...,N,N+1 – numery węzłów sieci przy czym *A* =0 a *B*=N=1. *i*=0 oraz *i*=N+1 odpowiadają punktom przyłożenia napięcia z zewnątrz. Są to węzły „zewnętrzne”. Pozostałe węzły możemy nazwać węzłami „wewnętrznymi”,
U_i - napięcie w węźle *i*-tym,

$\sigma_{ij} = 1/R_{ij}$ – jeżeli węzeł *i*-ty starej sieci jest połączony z węzłem *j*-tym oporem R_{ij},
$\sigma_{ij} = 0$ – jeżeli węzły te nie są bezpośrednio połączone oporem,

$\tilde{U}_i = U_i + \varepsilon_i$ - nowe napięcia w węzłach starej sieci po dołączeniu dodatkowych oporników.
Oczywiście $\varepsilon_0 = \varepsilon_{N+1} = 0.$
Obliczamy nową moc wydzielaną na starej sieci:

$$\tilde{M} = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N+1}\sum_{i=0}^{N+1}\sigma_{ij}\left(U_i + \varepsilon_i - U_j - \varepsilon_j\right)^2 = \frac{1}{2}\sum\sum\sigma_{ij}\left(U_i - U_j\right)^2 + \frac{1}{2}\sum\sum \begin{matrix} \sigma_{ij}\left(\varepsilon_i - \varepsilon_j\right)^2 + \\ + \sum\sum\sigma_{ij}\left(U_i - U_j\right)\left(\varepsilon_i - \varepsilon_j\right) \end{matrix}$$

Z trzech członów po prawej stronie pierwszy oznacza starą moc, a drugi nieujemny przyrost. Wykażemy teraz, że ostatni człon (liniowy w ε_i i ε_j) jest równy zeru.

Mamy:

$$\sum\sum \sigma_{ij}\left(U_i - U_j\right)\left(\varepsilon_i - \varepsilon_j\right) = \sum\sum \sigma_{ij}\cdot\left(U_i - U_j\right)\varepsilon_i - \sum\sum \sigma_{ij}\cdot\left(U_i - U_j\right)\varepsilon_j = S_1 - S_2 .$$

Korzystając z przemienności sumowania obliczamy pierwszą sumę podwójną S_1 wykonując sumowanie najpierw po *j* a potem po *i:*

$$S_1 = \sum_{i=0}^{N+1} \varepsilon_i \sum_{j=0}^{N+1} \sigma_{ij}\left(U_i - U_j\right).$$

Ponieważ $\varepsilon_0 = \varepsilon_{N+1} = 0$, więc w S_1 sumowanie po *i* możemy ograniczyć do węzłów wewnętrznych:

$$S_1 = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \sum_{j=0}^{N+1} \sigma_{ij}\left(U_i - U_j\right).$$

Z prawa Kirchhoffa (o zerowej sumie prądów wpływających do danego węzła) mamy

$$\sum_{j=0}^{N+1} \sigma_{ij}\left(U_i - U_j\right) = 0$$

dla *i* =1,2,3,...,N,
zatem

$$S_1 = 0 .$$

W podobny sposób dowodzi się, że S_2 =0.
Wobec tego

$$\tilde{M} = M + \frac{1}{2}\sum\sum \sigma_{ij}\left(\varepsilon_i - \varepsilon_j\right)^2 \geq M .$$

Ponieważ

$$\frac{\left(U_A - U_B\right)^2}{R_{AB}^{nowe}} = \tilde{M} \geq M = \frac{\left(U_A - U_B\right)^2}{R_{AB}^{now}},$$

więc

$$R_{AB}^{nowe} \leq R_{AB}^{stare}$$

co kończy dowód.

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk OF”

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie