XLI OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP I
Zadanie doświadczalne

ZADANIE D1

Pod działaniem sil zewnętrznych ciała stale ulęgają odkształceniom. Wyznacz zależność promienia r obszaru styczniści szklanej soczewki z płytka szklana od obciążenia soczewki.Zaówaz,że odkształceniu ulega zarówno soczewka jak i płytka,gdyż są one wykonane z materiału o tej samej twardości.

Możesz korzystać z następujących przedmiotów:

PRZYRZĄDY

1.Plasko wypukła soczewka szklana o znanej masie m_0 i promieniu krzywizny R
2.Plytkaszklana
3.10 Jednakowych ciężarków w kształcie krążków o znanej masie m 1 (ok.25g)
4.Smar do sklejania ciężarków o znanej masie ze sobą
5.Stoper
6.Kontomierz
7.Linijka z podziałką milimetrowa
8.Papier milimetrowy
9.Kredka woskowa lub flamaster piszący na szkle

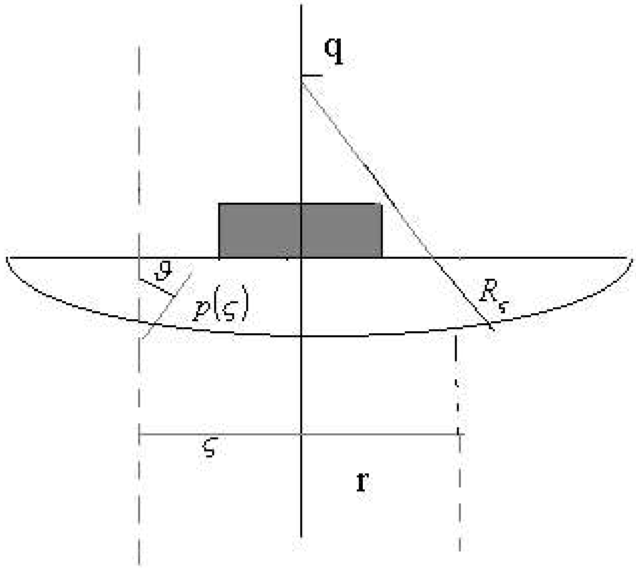
WSKAZOWKA

1. Przyjmij ,że dla malej całkowitej siły nacisku wiec dla małych odkształceń, ciśnienie w punkcie styczności jest kwadratowa funkcja odległości tego punktu od osi symetrii soczewki
2. Przeanalizuj związek momentu siły tarcia przy obrocie soczewki siły nacisku, zauważając, że $r \langle\langle R$.
3. Przyjmij ,że dla użytych w doświadczeniu materiałów współczynnik tarcia kinetycznego jest praktycznie równy współczynnikowi tarcia statycznego.

ROZWIĄZANIE ZADANIA D1

Część teoretyczna:

Znalezienie kształtu soczewki w zależności od całkowitej siły nacisku jest bardzo skomplikowane . Analizując związek momentu siły tarcia przy obrocie soczewki i siły nacisku można wyznaczyć promień obszaru styczności soczewki i płytki. W warunkach zdefiniowanych w zadaniu wystarczy zauważyć, że $R_ς$ (promień krzywizny soczewki w obszarze styczności)jest znacznie większy od promienia obszaru styczności (rys)



Rys.3

Korzystając ze wskazówki zakładamy , że ciśnienie p(ς) w punkcie styczności obu powierzchni odległym o ς od osi symetrii soczewki

$$p(\varsigma) = A + B\varsigma^2 \quad (1)$$

Z warunku brzegowego : dla ς= r p(r)=0,gdzie r jest odległością granicy styczności od osi symetrii soczewki .Stąd

$$p(\varsigma) = -Br^2\left(\frac{1-\varsigma^2}{r^2}\right) \quad (2)$$

Siła nacisku działająca na element E obszaru styczności (rys.2) o powierzchni $dS = \varsigma\left(\frac{d\varsigma}{\cos\vartheta}\right)d\phi$ wynosi

$$dN = p\{\varsigma\}\varsigma\left(\frac{d\varsigma}{\cos\vartheta}\right)d\phi\cos\vartheta = p(\varsigma)\varsigma d\varsigma d\phi$$

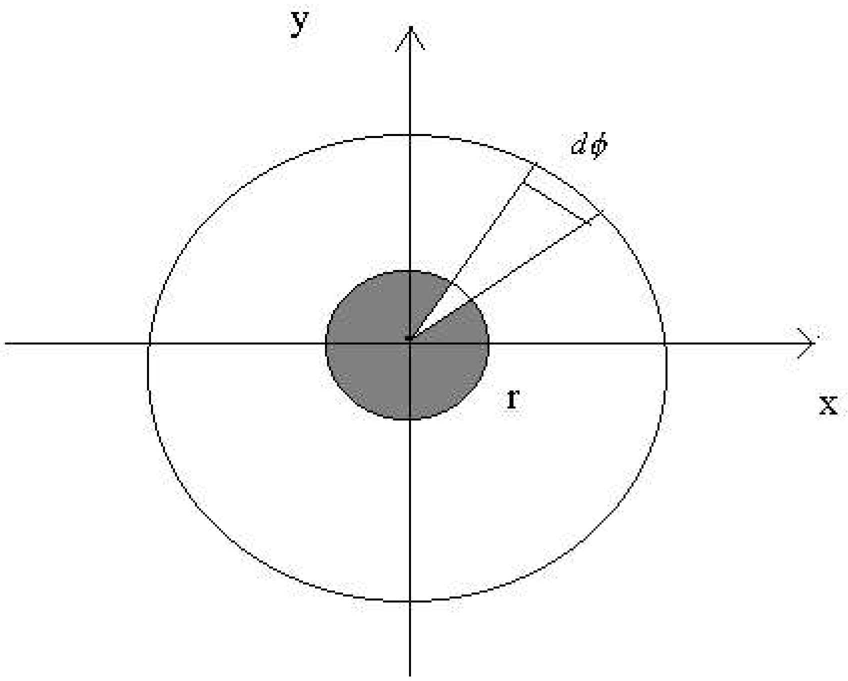
gdzie kąt ϑ jest kątem jaki tworzy normalna do odkształconej powierzchni z pionem.
Całkowita siła nacisku:

$$N = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^r d\varsigma\varsigma p(\varsigma) = 2\pi\int_0^r d\varsigma\varsigma p(\varsigma)$$

Podstawiając wyrażenie (2) otrzymujemy:

$$N = -2\pi Br^2\int_0^r\left(\frac{1-\varsigma^2}{r^2}\right)\varsigma d\varsigma = -2\pi Br^2\left[\int_0^r\varsigma d\varsigma - \frac{1}{r^2}\int_0^r\varsigma^3 d\varsigma\right]$$

$$N = \frac{-2\pi B r^4}{4} \qquad (3)$$



Rys.4

Siła tarcia działająca na element E przy obrocie soczewki jest proporcjonalna do składowej siły nacisku normalnej do powierzchni wynosi

$$dT = \frac{\mu dN}{\cos\vartheta}$$

Moment siły tarcia działający na element E przy obrocie soczewki wokół osi symetrii wynosi

$$dM_T = \varsigma dT = \mu p(\varsigma)\varsigma^2 d\varsigma d\phi$$

Moment siły tarcia przy obrocie soczewki wokół osi symetrii wynosi:

$$M_T = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^r d\varsigma\varsigma^2 p(\varsigma) = 2\pi\mu \int_0^r d\varsigma\varsigma^2 p(\varsigma)$$

$$M_T = \frac{-4\pi\mu B r^5}{15} .. \qquad (4)$$

Możemy wyeliminować stałą B dzieląc równanie (4) i(3) stronami

$$\frac{M_T}{N} = \frac{8\mu r}{15}.. \qquad (5)$$

Stąd:

$$r = \frac{15 M_T}{8\mu N} \qquad (6)$$

Całkowity moment siły tarcia można wyznaczyć badając ruch obrotowy soczewki względem jej osi symetrii. Równanie ruchu soczewki ma postać:

$$I_\varepsilon = - M_T,$$

Gdzie I oznacza całkowity moment bezwładności względem osi symetrii soczewki , ε- przyspieszenie kątowe , $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$, ω -prędkość kątowa .Stąd $\omega(t) = \omega_0 - \frac{M_T t}{I}$, a kąt obrazu:

$$\alpha(t) = \omega_0 t - \frac{M_T t^2}{2I}$$

W momencie zatrzymania się soczewki po czasie tzn. skutek hamującego działania siły tarcia prędkość kątowa ω(t) =0, a więc prędkość początkowa $\omega_0 = \frac{-M_T t}{I}$ i kąt wykonanego obrotu

$$\alpha = \frac{M_T t^2}{2I} \quad (7)$$

Stąd $\frac{M_T}{2I} = \frac{\alpha}{t^2}$ Nadając soczewce różne początkowe prędkości kątowe ω_0 i mierząc odpowiadające im α i t w chwili zatrzymania się soczewki możemy wyznaczyć całkowity moment siły tarcia $M_T = \frac{2I\alpha}{t^2}$ Jeżeli wykonamy takie pomiary przy różnych obciążeniach soczewki kładąc na niej od 0 do n ciężarków to będziemy mogli wyznaczyć $M_T(n)$ lub $\xi(n) = \frac{\alpha(n)}{[t(n)]^2} = \frac{M_T(n)}{2I(n)}$

Całkowity moment bezwładności I(n) jest sumą momentów bezwładności soczewki I_0 i ciężarków zwiększających siłę nacisku soczewki na płytkę. Dla n ciężarków $I(n) = I_0 + \frac{n m_1 a^2}{2}$, gdzie a oznacza promień ciężarka m_1 jego masę. Siła nacisku $N(n) = (m_0 + n m_1) g$. Masa soczewki m_0 jest znana a jej moment bezwładności obliczamy według. Wzoru $I_0 = m_0 R^2 \left(\frac{20b - 15b^2 + 3b^3}{10(3-b)} \right)$, gdzie R oznacza promień krzywizny soczewki, $b = \frac{D}{R}$, D- grubość soczewki .

Ostatecznie :

$$r(n) = 15\xi(n)\frac{\frac{I_0 + nm_1 a^2}{2}}{[(m_0 + nm_1)g \cdot 4\mu]} \qquad (8)$$

Zgodnie z założeniem przyjętym w treści zadania współczynnik tarcia kinetycznego μ można przyjąć za równy współczynnikowi tarcia statycznego , które możemy łatwo wyznaczyć doświadczalnie.

Część doświadczalna:

W doświadczeniu użyto soczewki o promieniu krzywizny R=65mm i masie m0=32g. Jako ciężarki stosuje stalowe krążki o średnicy 2a=33mm masie m1=25g każdy. Obciążając soczewkę kilkoma ciężarkami sklejono je odrobiną smaru. Dla ułatwienia pomiaru kata obrotu na kartce papieru milimetrowego narysowano używając kątomierza i linijki układ współrzędnych x, y i siatkę promieni wychodzących ze środka układu , przy czym kat pomiędzy kolejnymi promieniami wynosił 10. Taka kartkę podłożono pod płytkę szklana .Na płaskiej stronie soczewki narysowano 2 promienie przecinające się pod katem prostym w punkcie przejścia przez soczewka osi symetrii oraz oznakowano jedno z ramion „krzyża”. Pozwoliło to ustawić soczewkę tak , aby jej oś obrotu pokrywała się ze środkiem układu współrzędnych, a dodatnie ramie „krzyża” pokrywało się np. z dodatnim kierunkiem osi x. Soczewkę wprawiono w ruch palcami i w momencie puszczenia jej drugą ręką włączono stoper , którym mierzono czas trwania ruchu do momentu samorzutnego zatrzymania się soczewki .Pomiar czasu trwania ruchu obrotowego do momentu zatrzymania się soczewki przeprowadzono wielokrotnie dla samej soczewki (ilość ciężarków n=0)oraz dla soczewki obciążonej n ciężarkami nadając soczewce różne początkowe prędkości obrotu . Ciężarki należy ustawić na soczewce tak, by ich oś symetrii pokrywała się z osią symetrii soczewki. Otrzymane pary wartości (α, t^2)dla każdego n odłożono na papierze milimetrowym .Punkty te dla danego n powinny układać się na lini prostej przechodzącej przez punkt (α=0,t^2 =0).Dla każdego n przeprowadzono przez punkt doświadczalne linie proste i z ich nachylenia wyznaczono wielkość ξ(n) =α/ t^2 . Wynik pomiaru przedstawiono w tabeli 1.

Tabela1.

n	$\frac{N(n)}{g}$ $[g]$	$\xi(n)$ $\left[\frac{rad}{s}\right]$	$r(n)$ $[mm]$
0	32	0,068 ± 0,018	0,029 ± 0,098
2	82	0,114 ± 0,023	0,043 ± 0,089
4	132	0,140 ± 0,022	0,051 ± 0,008
8	232	0,200 ± 0,053	0,072 ± 0,019
10	282	0,232 ± 0,095	0,083 ± 0,034

Następnie wyznaczono współczynnik tarcia statycznego materiału soczewki o płytkę szklaną , szukając najmniejszego kąta β, dla którego soczewka zaczyna się zsuwać z równi pochyłej utworzoną przez nachyloną pod kątem β płytkę szklaną. Otrzymano $\mu = tg\beta = 0{,}15 \pm 0{,}02$. Korzystając ze wzoru (8) dla każdego n obliczono r(n) . Wartości r(n) wraz z błędami odłożono na papierze milimetrowym w funkcji obciążenia $\frac{N(n)}{g}$.

OCENA BŁĘDÓW

Wielkości mierzone α i t obarczone są błędem pomiarowym związanym z dokładnością użytych do pomiaru przyrządów , Δα=0,006 rad, Δt=0,2s. Mogą wystąpić błędy systematyczne związane z opóźnieniem lub przyspieszeniem włączenia lub zatrzymania na początku i na końcu ruchu soczewki . Może wystąpić też nieosiowe umieszczenie ciężarków na soczewce oraz nadanie jej dodatkowo innego ruchu poza ruchem obrotowym.

PUNKTACJA:

Część teoretyczna 10 punktów i doświadczalna 10 punktów

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk OF”

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl