

XLI OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP WSTĘPNY

Zadanie doświadczalne

ZADANIE D2

Nazwa zadania: „Prędkość chwilowa kulki”

Zaproponuj metodę pomiaru prędkości chwilowej stalowej kulki poruszającej się po zadanym torze. Wykorzystaj zaproponowaną metodę do pomiaru prędkości kulki staczającej się z równi pochyłej bez poślizgu.

Możesz korzystać z następujących przedmiotów:

1. Stalowa kulka
2. Folia aluminiowa
3. Nożyczki
4. Klej lub taśma klejąca
5. Linijka ze skalą milimetrową
6. Bateria kondensatorów o pojemności $C \geq 30 \text{ pF}$
7. Źródło prądu stałego
8. Woltomierz o dużym i znanym oporze wewnętrznym
9. Opornik dekadowy
10. Przewody do połączeń, krokodylki itp.
11. 2 wyłączniki elektryczne
12. Materiał ograniczający tor (np. szyba szklana, klocki drewniane)
13. Papier milimetrowy i półlogarytmiczny

UWAGA! Stosuj napięcia do 25 V. Zachowaj dużą ostrożność przy rozładowywaniu kondensatora.

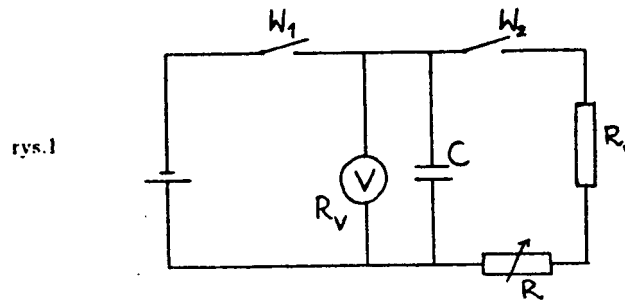
ROZWIĄZANIE ZADANIA D2

Część teoretyczna

1. Metoda pomiaru czasu

Prędkość chwilowa jest z definicji równa $v = \Delta S / \Delta t$, gdzie ΔS oznacza drogę przebytą w bardzo małym odstępie czasu Δt . Zestaw dostępnych w zadaniu przedmiotów sugeruje by do wyznaczenia czasu przelotu kulki wykorzystać pomiar

napięcia na rozładowującym się kondensatorze. W tym celu rozważmy obwód jak na rys.1. W obwodzie tym zamknięcie



wyłącznika W1 powoduje naładowanie kondensatora C. Gdy ustali się napięcie na kondensatorze ($U = U_0$) otwieramy wyłącznik W1 i zamykamy wyłącznik W2, co powoduje rozładowywanie się kondensatora przez opór $R+R_0$. Ponieważ opór woltomierza R_v jest z założenia bardzo duży ($R_v \gg (R+R_0)$) możemy całkowicie zaniedbać rozładowywanie się kondensatora przez opór R_v . W dowolnej chwili czasu t rozładowywanie się kondensatora jest więc opisane przez równania:

$$Q = CU \quad J = \frac{U}{(R + R_0)} \quad -\frac{dQ}{dt} = J$$

gdzie Q oznacza ładunek zgromadzony na kondensatorze. U — napięcie na kondensatorze, J — prąd rozładowania. Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{(R + R_0)C}$$

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{(R + R_0)C}$$

Całkując ostatnie równanie dostajemy

$$\ln Q = -\frac{t}{(R + R_0)C} + const.$$

a stąd

$$Q = A \exp\left(\frac{-t}{(R + R_0)C}\right)$$

Stałą A znajdujemy z warunku początkowego dla $t = 0$: $U = U_0$, $Q(t = 0) = CU_0$. Stąd dowolnej chwili czasu ładunek zgromadzony na kondensatorze wynosi

$$Q = CU_0 \exp\left(\frac{-t}{(R + R_0)C}\right)$$

prąd rozładowania kondensatora

$$J = \frac{U_0}{R + R_0} \exp\left(\frac{-t}{(R + R_0)C}\right)$$

napięcie na kondensatorze

$$U = U_0 \exp\left(\frac{-t}{(R + R_0)C}\right)$$

Jeżeli zamkniemy obwód kondensatora na czas t to po tym czasie napięcie na kondensatorze wskazywane przez woltomierz będzie równe $U_k = U_0 \exp\left(\frac{-t}{(R + R_0)C}\right)$.

Rejestrując napięcie początkowe i końcowe na kondensatorze można więc wyznaczyć czas, w którym obwód rozładowania był zamknięty

$$\tau = (R + R_0)C \ln \frac{U_0}{U_k} \quad (1)$$

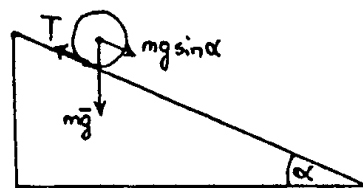
Jeżeli stalowa kulka przelatująca przez odpowiednio zrobioną przerwę w obwodzie będzie zamykać ten obwód na czas $\Delta t = \tau$, to mierząc napięcie na kondensatorze przed i po przejściu kulki będziemy mogli wyznaczyć czas Δt . Do wyznaczenia prędkości potrzebna będzie jeszcze znajomość drogi ΔS przebytej w tym czasie przez kulkę. Pomiaru tej drogi można dokonać za pomocą linijki, a dokładny sposób pomiaru będzie zależał od konstrukcji przerwy w obwodzie.

2. Wyznaczenie prędkości kulki staczającej się po równi bez poślizgu.

W ruchu kulki staczającej się bez poślizgu z równi pochyłej musi występować tarcie, gdyż, bez tarcia kulka nie obracałaby się, a tylko poruszała się ruchem postępowym, a więc wystąpiłby poślizg. Tarcie jest więc tarcie statyczne. Ruch taki występuje dla małych kątów nachylenia równi, a zakres tych kątów można znaleźć z warunku na tarcie statyczne $T \leq fN$, gdzie siła nacisku kulki na równię $N = mg \cos \alpha$, a f oznacza współczynnik tarcia. Aby znaleźć prędkość kulki staczającej się z równi można rozwiązać równania ruchu lub skorzystać z zasady zachowania energii.

a) Równania ruchu kulki (rys.2)

$$\left. \begin{array}{l} \text{równanie ruchu postępowego} \\ ma = mg \sin \alpha - T \\ \text{równanie ruchu obrotowego} \\ I\varepsilon = TR \\ \text{warunek na brak poślizgu} \\ v = \omega R \quad \text{oraz} \quad a = \varepsilon R. \end{array} \right\} (2)$$



rys.2

gdzie m oznacza masę kulki, R — promień kulki, I — moment bezwładności kulki względem osi przechodzącej przez jej środek, a — przyspieszenie środka kulki, v — prędkość liniową środka kulki, ε — przyspieszenie kątowe ruchu obrotowego kulki, ω — prędkość kątową kulki. Równania te są prawdziwe dla kątów α dla których $T \leq mg \cos \alpha$. Z równań (2) otrzymujemy przyspieszenie

$$a = \frac{mg \sin \alpha}{m + I / R^2}$$

Dla prędkości początkowej $v_0 = 0$ kulki puszczonej swobodnie z równi spełnione jest równanie $S_a = v^2/2$. Droga S przebyta przez kulkę wzdłuż równi wynosi $S = \Delta h / \sin \alpha$ gdzie Δh oznacza zmianę wysokości kulki na równi. Stąd kwadrat prędkości kulki staczającej się bez poślizgu z równi i obniżającej przy tym swoją wysokość o Δh wynosi

$$v^2 = \frac{2g\Delta h}{1 + I/(mR^2)}$$

Ponieważ moment bezwładności kulki względem osi przechodzącej przez jej środek wynosi $I = \frac{2}{5}mR^2$ otrzymujemy

$$v^2 = \frac{10}{7}g\Delta h \quad (3)$$

Jeśli znamy współczynnik tarcia kulki o równię, to możemy znaleźć dla jakich kątów α ($\alpha \leq \alpha_0$) prawdziwa jest równość (3). Siła tarcia T z równań (2) wyraża się wzorem

$$T = \frac{mg \sin \alpha}{1 + mr^2 / I}$$

Dla kąta granicznego α_0 mamy $T = fN$, a więc $\tan \alpha_0 = f(1 + mr^2 / I)$.

b) Zasada zachowania energii

Wzór (3) można otrzymać również z zasady zachowania energii:

$$mg\Delta h = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

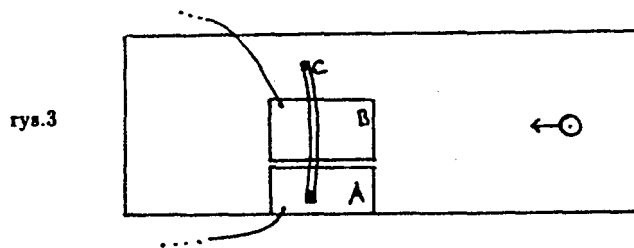
Siła tarcia nie wykonuje pracy, ponieważ nie występuje poślizg i prędkość punktu, do którego przyłożona jest siła tarcia wynosi zero.

Część doświadczalna

1. Konstrukcja przerwy w obwodzie

Do budowy przerwy w obwodzie zamykanej na krótki odcinek czasu przez przelatującą kulkę wygodnie jest użyć pasków folii aluminiowej. Można nakleić te paski na szybę szklaną, która uniesiona z jednego końca będzie stanowić równię pochyłą. Kontakt elektryczny pomiędzy przelatującą kulką a folią nie będzie doskonały, ale, jak pokażemy w dalszej części opisu, opór R_0 tego złącza można oszacować doświadczalnie. Przerwę mogą więc stanowić dwa paski folii aluminiowej rozsunięte na odległość mniejszą niż np. 1 mm (odległość ta zależy od promienia użytej kulki). Przy takiej konstrukcji łatwo jest określić drogę przebywaną przez kulkę — będzie to po prostu szerokość paska folii. Trudno jest jednak nawet przy dokładnym wypoziomowaniu równi, puszczać kulkę tak by za każdym razem

przeleciała dokładnie przez tak wąską przerwę. W opisanym poniżej doświadczeniu przerwę skonstruowano jak pokazuje rys.3. Na szybę naklejono dwa paski folii A i B



w odległości 1 mm od siebie. Do tych pasków podłączono za pomocą krokodyłków dalszą część obwodu z rys.1. Kontakt uzyskiwano poprzez wąski pasek C zwarty z folią A, lecz uniesiony nad paskiem B na wysokość około 1 mm. Kulkę puszczano tak by przelatowała przez folię B, a tym samym dociskając folię C do folii B zamykała obwód elektryczny.

2. Dobór parametrów obwodu

W doświadczeniu użyto baterii kondensatorów o pojemności około $100 \mu\text{F}$, woltomierza cyfrowego o oporze wewnętrznym $R_v = 10 \text{ M}\Omega$ i opornicy dekadowej umożliwiającej zmianę oporu R od kilku omów do kilku megaomów. Kondensator ładowano napięciem stałym 20 V przy zamkniętym wyłączniku $W1$. Stała czasowa $R_v C = 1000 \text{ s}$ dostatecznie zabezpieczała przed rozładowaniem się kondensatora przez opór woltomierza. Warunek ten był spełniony także dla 3—4 razy mniejszej stałej $R_v C$. Gdy zamknięty był wyłącznik $W2$ kondensator mógł rozładowywać się poprzez przerwę w obwodzie zamykaną przez przelatującą kulkę. Opór tego złącza oznaczono na rysie przez R_0 . Opór R opornicy dekadowej należało tak dobrać, żeby przelot kulki przez złącze powodował zauważalne rozładowanie kondensatora. Wyznaczenie czasu przelotu kulki wymaga dokładnej znajomości oporu $(R + R_0)$ oraz pojemności C kondensatora. Rzeczywista pojemność kondensatora może różnić się od nominalnej o 10%. Można jednak tę pojemność wyznaczyć doświadczalnie.

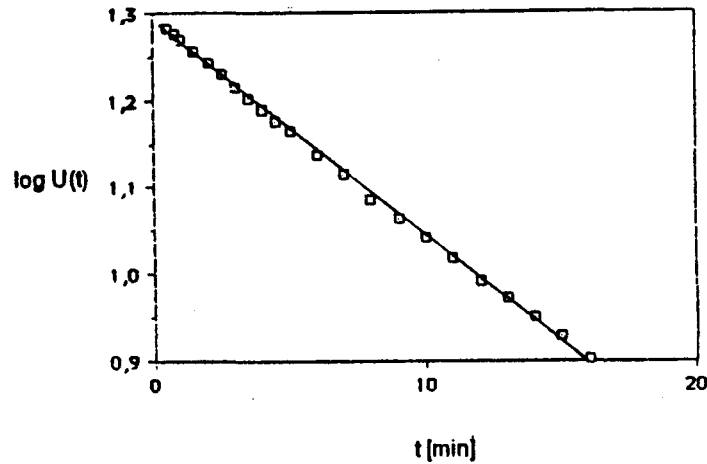
3. Dokładne wyznaczenie pojemności kondensatora

Znając dokładną wartość oporu wewnętrznego woltomierza (jest ona zwykle podana na obudowie miernika) można wyznaczyć pojemność C kondensatora. W tym celu na leży mierzyć napięcie $U(t)$ na kondensatorze rozładowującym się przez opór R_v przy otwartych obu wyłącznikach w pewnych odstępach czasu. Następnie wykreślamy wartości $\log U(t)$ w zależności od czasu. Powinniśmy dostać linię prostą opisaną równaniem $\log U(t) = \log U_0 - (t \log e)/(R_v C)$. Można użyć do tego papieru półlogarytmicznego. Ze współczynnika kierunkowego tej prostej (rys.4) możemy wyznaczyć C . W omawianym przypadku otrzymano $C = (108,6 \pm 2,2) \mu\text{F}$.

4. Wyznaczenie oporu złącza R_0

Aby wyznaczyć opór R_0 złącza przeprowadzamy pomiary napięcia U_0 przed i napięcia U_k

rys.4

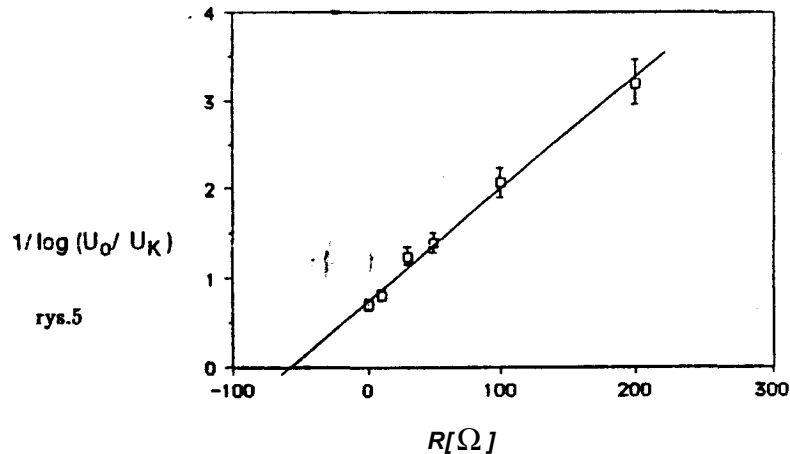


I po przelocie przez złącze kulki stalowej spuszczonej z jednej wysokości na równi zmieniając opór R opornicy dekadowej od 0 do 200Ω . Tym razem $\log(U_0/U_k) = (\Delta t \log e) / [C(R + R_0)]$, a więc

$$\frac{1}{\log(U_0/U_k)} = \frac{C}{\Delta t \log e} (R + R_0)$$

Wykreślamy zależność $1/\log(U_0/U_k)$ od oporu R i przeprowadzamy linię prostą przez punkty doświadczalne (rys.5). Z punktu przecięcia ekstrapolowanej prostej z osią odciętych określamy wartość R_0 . Otrzymano $R = (60 \pm 10) \Omega$. Wartość ta uwzględnia także opór przewodów.

rys.5



5. Pomiary czasu przelotu kulki

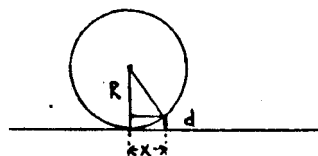
Znając wartości C i $(R + R_0)$ możemy przystąpić do pomiaru czasu przelotu kulki przez złącze. Pomiary te przeprowadzamy dla ustalonego oporu R , który w omawianym przypadku wynosił $R = 200 \Omega$. Wartość tego oporu została dobrana tak, by przelot kulki o szukanej, lecz określonej prędkości powodował spadek napięcia na kondensatorze o około połowę. Stała czasowa w obwodzie rozładowania kondensatora wynosiła więc $C(R + R_0) = 65,02 \text{ ms}$. Pomiary napięć U_0 i U_k na kondensatorze przeprowadzono dla kilku wysokości Δh powyżej złącza i dla dwóch kątów nachylenia równi $\alpha = 5,4^\circ$ oraz 13° . Dla każdego przypadku pomiary wykonywano kilkakrotnie i obliczano średnią wartość U_0/U_k oraz odchylenie

standardowe. Otrzymano dobrą powtarzalność wyników gdy równia była wypoziomowana.

6. Pomiar drogi ΔS przebytej przez kulkę w czasie Δt .

W przypadku zastosowanego złącza (rys.3) Droga ΔS jest to odcinek toru kulki, na którym pozostaje ona w kontakcie elektrycznym z wąskim paskiem C folii aluminiowej. Odcinek ten jest dłuższy od szerokości paska, gdyż kulka styka się z paskiem zbliżając się do niego i oddalając jak pokazuje rys.6. Odległość z można wyznaczyć doświadczalnie,

rys.6



sprawdzając kiedy wystąpi kontakt kulki z paskiem C rozpoczynający rozładowywanie kondensatora. Można też obliczyć tę odległość dla wysokości paska nad szybą równej d i promienia kulki R . Łatwo zobaczyć, że $x^2 = R^2 - (R-d)^2 = 2Rd - d^2$. W omawianym doświadczeniu dla kulki o $R=1,43$ cm, $d=0,1$ cm obliczono więc $x=0,53$ cm. Dla paska o szerokości $z=0,3$ cm droga $\Delta S = z+2x = 1,36$ cm. Wyznaczając tę odległość doświadczalnie znajdujemy $\Delta S=(1,3 \pm 0,1)$ cm.

7. Analiza uzyskanych wyników

Uśrednione wyniki poszczególnych serii pomiarowych przedstawione są w tabeli 1. Na wy kresie (rys.7) przedstawiono uzyskaną doświadczalnie zależność kwadratu prędkości kulki od różnicy wysokości Δh dla obu kątów. Wartości Δh wyznaczono jako $\Delta h = \Delta L \sin \alpha$, gdzie poszczególne odcinki ΔL zaznaczono na szybie, a ich długość zmierzono linijką. Zależność teoretyczną (wzór (3)) przedstawiono linią prostą. Zgodnie z tą zależnością wyniki pomiarów prędkości nie powinny zależeć od kąta nachylenia równi.

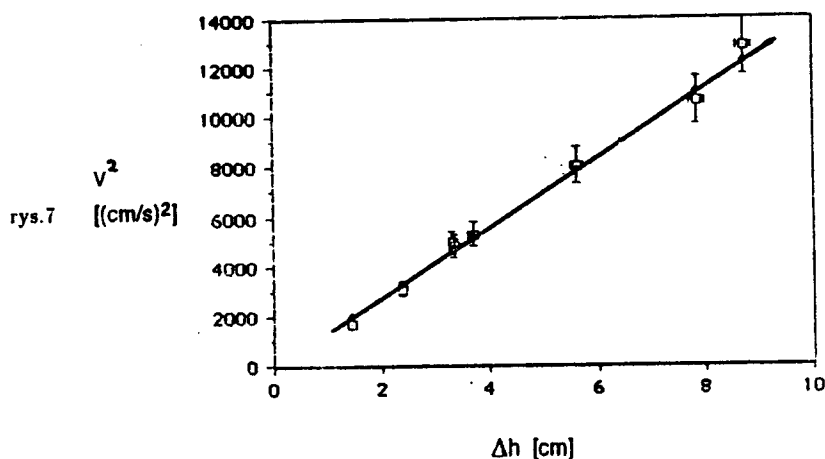


Tabela 1

α	Δh	U_0/U_K	Δt	$v_{dośw}$	v_{teor}
[°]	[cm]		[ms]	[cm/s]	[cm/s]
13,0	8,75	1,50	11,45	113,5	110,7
13,0	7,87	1,56	12,60	103,2	105,0
13,0	5,62	1,67	14,48	89,8	88,7
13,0	3,37	1,94	18,71	69,5	68,8
5,4	3,69	1,88	17,83	72,9	71,9
5,4	3,32	1,92	18,42	70,6	68,2
5,4	2,37	2,29	23,40	55,6	57,6
5,4	1,42	3,06	31,60	41,1	44,6

Ocena błędów

Błąd pomiaru napięcia na kondensatorze określono z rozrzutu wyników wielokrotnych pomiarów powtarzanych w tych samych warunkach. Jest on znacząco większy od błędu związanego z dokładnością miernika możemy wobec tego pominąć.

Błędy określenia pojemności C kondensatora oraz oporu R_0 złącza określono z wykresów prowadząc proste o największym i najmniejszym nachyleniu przez punkty doświadczalne z zaznaczonymi błędami.

Błąd pomiaru czasu Δt obliczono jako

$$\frac{\delta(\Delta t)}{\Delta t} = \frac{\Delta C}{C} + \frac{\Delta R_0}{R + R_0} + \frac{\Delta U_0}{U_0} + \frac{\Delta U_k}{U_k}$$

Błąd pomiaru drogi ΔS oceniono na $\delta(\Delta S) = 0,1 \text{ cm}$.

Błąd wyznaczenia prędkości obliczono jako

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\delta(\Delta S)}{\Delta S} + \frac{\delta(\Delta t)}{\Delta t}$$

Na błąd określenia prędkości wpływają głównie błędy $\Delta R_0 / (R + R_0)$ oraz $\delta(\Delta S) / \Delta S$. Wielkość $\Delta R_0 / (R + R_0)$ można zmniejszyć zwiększając znany opór R . Opór ten nie może być jednak zbyt duży, gdyż kondensator rozładowywałby się zbyt wolno, co z kolei zmniejszałoby dokładność pomiaru napięcia na kondensatorze po przelocie kulki. Można to skompensować poprzez zwiększenie szerokości paska folii aluminiowej, a więc tym samym drogi ΔS i czasu trwania kontaktu Δt . Działanie takie spowodowałoby dodatkowo zmniejszenie błędu $\delta(\Delta S) / \Delta S$. Wtedy jednak pomiar prędkości będzie odbywał się w dłuższym czasie Δt . Będziemy więc przechodzić od pomiaru prędkości chwilowej do pomiaru prędkości średniej. Należy, więc wybrać warunki optymalne.

Punktacja:

- Metoda pomiaru czasu –0,5 p

- Równania ruchu kulki –0,5 p
- Zasada zachowania energii –0,5 p
- Konstrukcja przerwy w obwodzie –0,5 p
- Dobór parametrów obwodu –0,5 p
- Dokładne wyznaczenie pojemności kondensatora –0,5 p
- Wyznaczenie oporu złącza -0,5 p
- Pomiar czasu przelotu kulki –1 p
- Analiza uzyskanych wyników –0,5 p
- Ocena błędów –1 p

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk OF”

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szcz.pl