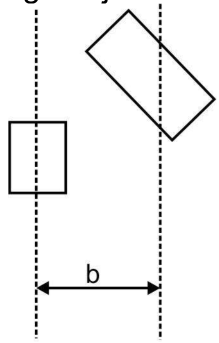
XLII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP III
Zadanie teoretyczne

ZADANIE T1

Nazwa zadania: „Obracające się bloczki”

Po płaskim, poziomym stole ślizgają się bez tarcia dwa różne płaskie klocki o jednakowych masach *m*. Początkowo klocki przemieszczają się ruchem postępowym (bez obrotów) tak, że ich środki mas poruszają się z jednakowymi prędkościami *v* po równoległych liniach prostych. Odległość między tymi liniami wynosi *d*. Rycina 1 przedstawia jedną z możliwych konfiguracji klocków.



Ryc. 1

W pewnym momencie następuje doskonale sprężyste zderzenie klocków. Po zderzeniu klocki wykonują ruch postępowo –obrotowy nadal ślizgają się po powierzchni stołu. Prędkość kątowa pierwszego klocka wynosi ω_1, zaś prędkość kątowa drugiego wynosi ω_2. moment bezwładności klocków względem osi pionowych przechodzących przez środki mas klocków wynoszą odpowiednio I_1 i I_2.

1) Wykaż, że moment pędu klocka względem dowolnego, ustalonego punktu stołu jest równy sumie momentu pędu środka masy klocka względem tego punktu oraz momentu pędu klocka względem jego środka masy.
2) Oblicz odległość *d’* między prostymi, po których poruszają się środki mas klocków po zderzeniu.
3) Przyjmując, że po zderzeniu wartości prędkości pierwszego klocka wynosi $v/\sqrt{2}$. zaś drugi klocek nie wykonuje obrotów, podaj i zinterpretuj (naszkicuj) zależność *d’* od *d*.

ROZWIĄZANIE ZADANIA T1

1) Niech r_i i r'_i oznaczają odpowiednio wektory wodzące punktów materialnych o masach m_i w układzie związanym ze stołem i w nieobracającym się układzie środka masy klocka. Wtedy $\mathbf{r_i = R + r'_i}$ i $\mathbf{v_i} = V + \mathbf{v'_i}$, gdzie $\mathbf{v_i = dr_i}/dt$ i $\mathbf{v'_i = dr'_i}/dt$, zaś wektory $\mathbf{R}$ i $\mathbf{V}$ odnoszą się do środka masy. Moment pędu wyraża się wzorem

$$J = \sum_i m_i r_i \times v_i = \sum_i m_i R \times V + \sum_i m_i r_i' \times V + \sum_i m_i R \times v_i' + \sum_i m_i r_i' \times v_i' = MR \times V + I\omega \quad (1)$$

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\sum_i m_i r_i' = 0 \qquad \text{(środek masy)}$$

i z jej pochodnej

$$\left(d/dt\right)\sum_i m_i r_i' = \sum_i m_i v_i' = 0$$

$\sum_i m_i = M$ jest całkowitą masą klocka, zaś *I* – jego momentem bezwładności względem przechodzącej przez środek masy osi obrotu, określonej przez prostopadły do powierzchni stołu wektor prędkości kątowej $\vec{\omega}$. Ponieważ wektory ***r'*** i ***v'*** są wzajemnie prostopadłe i oba leżą w płaszczyźnie stołu, ich iloczyn wektorowy ***r'**ᵢ x **v'**ᵢ* jest skierowany zgodnie z $\vec{\omega}$. Wartość prędkości $v_i' = |\omega| r_i'$, zatem

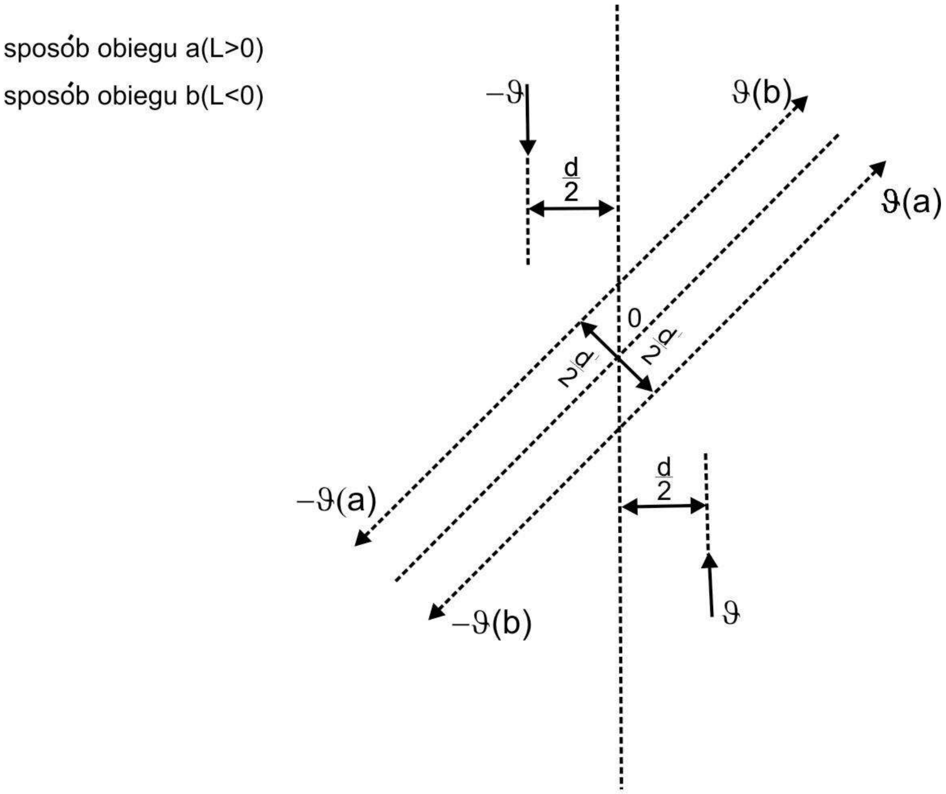
$$\sum_i m_i r_i' \times v_i' = \sum_i m_i r_i'^2 \vec{\omega} = I\vec{\omega} \qquad (2)$$

2) Po zderzeniu prędkości klocków będą jednakowe co do wartości lecz przeciwnie skierowane, co wynika z zasady zachowania całkowitego pędu układu. Korzystając z zasady zachowania energii i momentu pędu układu dwóch klocków otrzymujemy równania

$$2\frac{mv^2}{2} = 2\frac{mv'^2}{2} + \frac{I_1\omega_1^2}{2} + \frac{I_2\omega_2^2}{2} \qquad (3)$$

$$2mv\frac{d}{2} = \pm 2mv'\frac{d'}{2} + I_1\omega_1 + I_2\omega_2 \qquad (4)$$

gdzie d' i v' oznaczają odpowiednio odległość wzajemną torów i wartość prędkości klocków po zderzeniu. Prędkościom kątowym $\omega < 0$ odpowiada obrót klocka w kierunku zgodnym, zaś prędkościom $\omega > 0$ – obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (patrzymy z góry na klocek ślizgający się po stole). Orbitalny moment pędu układu klocków względem wspólnego środka masy *O*, $L = \pm mv'd'$, jest dodatni lub ujemny, w zależności od sposobu obiegu punktu *O* przez oba klocki po zderzeniu, ryc. 2.



Ryc. 2

Z równań (3) i (4) wyznaczamy *v'*

$$v' = \sqrt{v^2 - \frac{I_1\omega_1}{2m} - \frac{I_2\omega_2}{2m}} \tag{5}$$

oraz *d'*

$$d' = \left| \frac{mvd - I_1\omega_1 - I_2\omega_2}{mv'} \right| \tag{6}$$

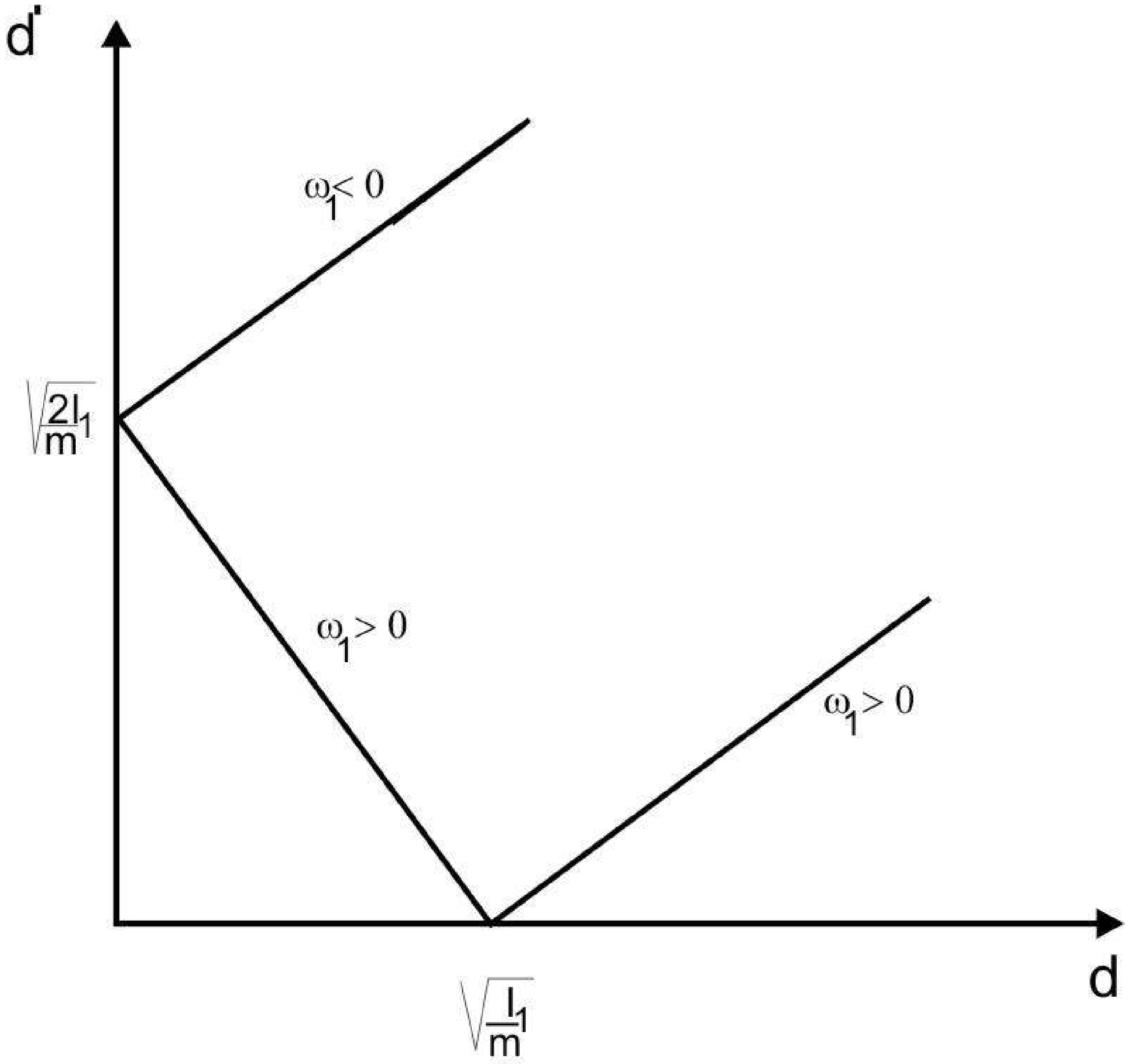
3) Ponieważ wartość prędkości obu klocków po zderzeniu wynosi $v' = v/\sqrt{2}$, zaś $\omega_2 = 0$, korzystając ze wzoru (3) otrzymujemy

$$\omega_1 = \mp v\sqrt{\frac{m}{I_1}} \tag{7}$$

skąd po podstawieniu do (6) otrzymujemy

$$d' = \sqrt{2}\left| d - \frac{I_1\omega_1}{mv} \right| = \sqrt{2}\left| d \mp \sqrt{\frac{I_1}{m}} \right| \tag{8}$$

Wykres zależności *d'* od *d* jest przedstawiony na rycinie 3.



Ryc. 3

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk OF"

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl