

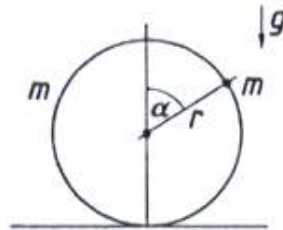
XLVII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP II

Zadanie teoretyczne

ZADANIE T1

Nazwa zadania: „Obręcz z ciężarkiem”

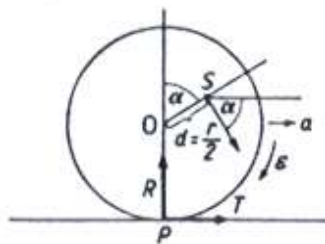
Do cienkiej, jednorodnej obręczy o masie m i promieniu r przymocowano bardzo małych rozmiarów ciężarek o masie także równej m , ryc.1. Obręcz może poruszać się w płaszczyźnie pionowej po poziomym stole w polu grawitacyjnym o natężeniu g . Jaki warunek musi spełniać współczynnik tarcia f między stołem a obręczą, aby początkowo nieruchoma obręcz z ciężarkiem znajdującym się w pozycji odpowiadającej $\alpha = \frac{\pi}{3}$ (ryc.1) rozpoczęła ruch bez poślizgu? Zakładając spełnienie tego warunku oblicz przyspieszenie kątowe obręczy w chwili początkowej.



ryc.1

ROZWIĄZANIE ZADANIA T1

Całkowita masa układu wynosi $M=2m$. Środek masy obręczy bez ciężarka znajduje się w środku okręgu O , zatem środek masy układu leży w odległości $d=r/2$ od punktu O na linii prostej, przechodzącej przez O i przez ciężarek, ryc.2.



ryc.2

Moment bezwładności układu względem osi O :

$$I_0 = 2mr^2,$$

względem osi przechodzącej przez środek masy S (na mocy tw. Steinera):

$$I_s = I_0 - Md^2 = \left(\frac{3}{2}\right)mr^2$$

oraz względem osi przechodzącej przez punkt styku obręczy ze stołem P :

$$(1) \quad I_P = Mgd \sin \alpha,$$

stąd

$$(2) \quad \varepsilon = \frac{\sqrt{3}g}{10r}.$$

Przyspieszenie $\varepsilon = a/r$ można też wyznaczyć z równań

$$(3) \quad T = ma_s,$$

$$(4) \quad Mgd \sin \alpha - Tr - Mad \cos \alpha = I_o \frac{a}{r},$$

w których (3) opisuje ruch postępowy środka masy S w kierunku poziomym pod wpływem siły tarcia T, zaś (4) opisuje obrót wokół środka obręczy w układzie nieinercyjnym, współporuszającym się ze środkiem O z przyspieszeniem a. Przyspieszenie a_s , jakiego doznaje środek masy w kierunku poziomym składa się z rzutu poziomego przyspieszenia środka masy S względem środka obręczy O oraz przyspieszenia a środka O względem stołu.

$$(5) \quad a_s = \varepsilon r + \varepsilon \frac{r}{2} \cos \alpha = \frac{5}{4} a.$$

W celu otrzymania warunku toczenia rozważamy równanie opisujące obrót układu względem środka masy S, które zawiera siłę reakcji stołu R działającą na obręcz w kierunku pionowym,

$$(6) \quad Rd \sin \alpha - T(r + d \cos \alpha) = I_s \varepsilon.$$

Podstawiając do $\varepsilon = a/r$ przyspieszenie $a = (4/5)a_s = (4/5)T/M$ otrzymujemy dla $\alpha = \pi/3$ warunek toczenia:

$$(7) \quad f > \frac{T}{R} = \frac{5\sqrt{3}}{37}.$$

Warunek (7) można też otrzymać z równania (3) oraz z równania ruchu postępowego środka masy w kierunku pionowym $Mg - R = Med \sin \alpha$. Obliczamy $T = Ma_s = (5\sqrt{3}/20)mg$ oraz $R = (37/20)mg$, co jest zgodne z wynikiem (7).

Słowa klucze:

Moment bezwładności, twierdzenie Steinera, przyspieszenie kątowe, współczynnik tarcia

Źródło:
Zadanie pochodzi z czasopisma „Fizyka w Szkole” listopad-grudzień 98r.

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl