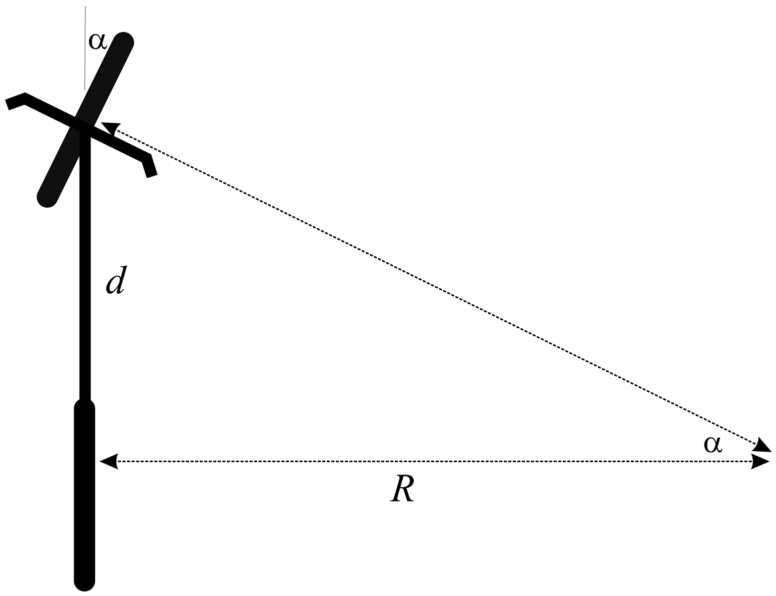
LII Olimpiada Fizyczna
Rozwiązania zadań teoretycznych

Zadanie T1

Założenie sztywności układu rowerzysta+rower gwarantuje, że jeśli kierownica zostanie skręcona, to rowerzysta i rower zaczną poruszać się po wspólnym okręgu. Możemy przyjąć (rys. 1), że promień tego okręgu jest równy promieniowi R, po którym porusza się tylne koło roweru:

$$R = d \operatorname{ctg} \alpha. \tag{1}$$

gdzie α oznacza kąt skręcenia kierownicy. Promień okręgu, po którym porusza się przednie koło jest nieznacznie większy. Rower odchylony od pionu o kąt ϕ może zostać wypro-



rys. 1

stowany przez moment siły odśrodkowej spowodowanej ruchem po okręgu po skręceniu kierownicy o kąt α w tym samym kierunku, w którym się odchylił. Jest to możliwe, gdy moment siły odśrodkowej zrównoważy lub przewyższy moment siły grawitacyjnej, która dąży do jeszcze większego wychylenia roweru. Warunek ten sprowadza się do nierówności:

$$\frac{mv^2}{R} \cos\varphi \geq mg \sin\varphi, \tag{2}$$

gdzie m i v są masą i prędkością roweru z rowerzystą. Po uwzględnieniu wzoru (1) na promień okręgu dostajemy

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{gd}{v^2} \operatorname{tg} \varphi \approx 0.014, \tag{3}$$

czyli $\alpha \approx 0.8°$. Widać, że przy dużych prędkościach wystarczy wykonać niewielki skręt kierownicą by powrócić do równowagi. Natomiast im mniejsza prędkość roweru tym mocniej należy skręcać kierownicą. Przy prędkości $v = 1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, skręty kierownicą niezbędne do stabilizowania pozycji roweru muszą być około 10 razy większe niż kąt wychylenia rowerzysty od pionu. Oznacza to, że przy tak małych prędkościach jazda na rowerze staje się trudna.

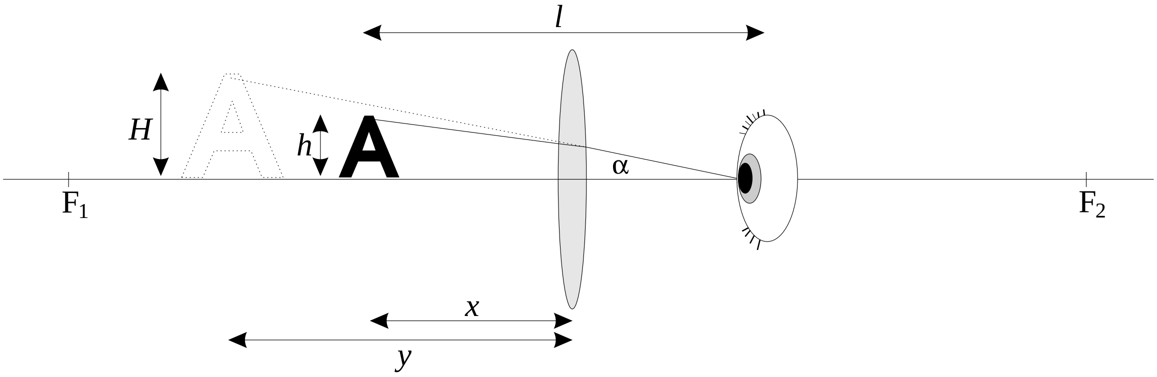
Stabilność może być osiągnięta tylko dzięki ciągłemu skręcaniu kierownicą. Na rowerze, którego kierownicę zablokowano w ogóle nie da się jeździć.

Punktacja

stwierdzenie, że po skręceniu kierownicy rower porusza się po okręgu — 1 pkt.
wzór 1 — 2 pkt.
warunek 2 — 3 pkt.
wzór 3 — 1 pkt.
wartość kąta α — 1 pkt.
właściwy kierunek skrętu — 1 pkt.
dyskusja — 1 pkt.

Zadanie T2

O wielkości widzianych przez Dyrektor Okullę liter decydują ich rozmiary kątowe. Rozważmy soczewkę okularów umieszczoną w odległości x od litery, znajdującej się na osi optycznej. Oznaczmy rzeczywiste rozmiary litery przez h, natomiast wielkość obrazu litery widzianego przez soczewkę jako H. Nasze zadanie polega na znalezieniu takiego x, aby kąt α (rysunek 2) był możliwie największy. Oko oraz litera znajdują się w mniejszej odległości od soczewki niż jej ogniska F_1 i F_2.



rys. 2

Ponieważ uzyskany obraz jest pozorny, to jego odległość y od soczewki możemy wyznaczyć z równania

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{f},$$

gdzie f jest ogniskową soczewki:

$$y = \frac{xf}{f-x}. \tag{1}$$

Z rysunku 2 odczytujemy, że $\operatorname{tg}\alpha = H/(y + l - x)$. Stąd zaś dostajemy:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(y/x)h}{y + l - x} = \frac{hf}{(x - l/2)^2 + l(f - l/4)}. \tag{2}$$

Widać, że przy ustalonej odległości l między okiem i kartką oraz ustalonej ogniskowej soczewki okularów f rozmiary kątowe liter α są maksymalne dla $x = \frac{l}{2}$. Oznacza to, że rozmiary kątowe liter będą największe, gdy okulary zostaną umieszczone w połowie odległości między okiem a kartką. Ale wtedy pani dyrektor już nie widzi ostro, bo gdyby wciąż widziała ostro, to nosiłaby słabsze okulary.

Punktacja

stwierdzenie, że o wielkości widzianego obrazu decydują rozmiary kątowe — 2pkt.
stwierdzenie, że obraz jest pozorny, wzór soczewkowy i wzór (1) – 2 pkt.
wzór (2) — 2 pkt.
wynik (maksymalne rozmiary kątowe dla $x = l/2$) — 2 pkt.
dyskusja — 2 pkt.

Zadanie T3

Rozważmy linię pola elektrycznego wychodzącą z ładunku q_1 pod kątem α i wchodzącą do ładunku $-q_2$ pod kątem β. Ponieważ linie pola elektrycznego nie mogą się przecinać, wszystkie linie wychodzące z q_1 pod kątami mniejszymi niż α będą wchodziły do $-q_2$ pod kątami mniejszymi niż β. Oznacza to, że strumień pola Φ_1 wychodzącego z ładunku q_1 przez powierzchnię wycinka sfery o promieniu $R \to 0$ i kącie rozwarcia 2α jest równy strumieniowi pola Φ_2 wchodzącego do ładunku $-q_2$ przez powierzchnię wycinka sfery o promieniu $R \to 0$ i kącie rozwarcia 2β. Korzystając z zasady superpozycji oraz tego, że w granicy $R \to 0$ wkład do strumienia Φ_1 od ładunku $-q_2$ znika, ponieważ powierzchnia wycinka sfery dąży do zera, a pole od $-q_2$ w otoczeniu q_1 jest skończone i w przybliżeniu stałe, strumień Φ_1 możemy zapisać w postaci

$$\Phi_1 = 4\pi A q_1 \sin^2(\alpha/2), \tag{1}$$

gdzie A — stała zależna od wyboru układu jednostek. Skorzystaliśmy tu z wzoru na pole powierzchni wycinka sfery o promieniu R i kącie rozwarcia θ — $S = 4\pi R^2 \sin^2(\theta/4)$. Podobne rozważanie daje wzór na Φ_2

$$\Phi_2 = 4\pi A q_2 \sin^2(\beta/2). \tag{2}$$

Z równości $\Phi_1 = \Phi_2$ otrzymujemy

$$\sin(\beta/2) = \sqrt{\frac{q_1}{q_2}} \sin(\alpha/2). \tag{3}$$

Punktacja

dyskusja własności linii pola i stwierdzenie równości strumieni Φ_1 i Φ_2 — 4 pkt.
wzory (1) i (2) z uzasadnieniem — 5 ptk.
wynik — 1pkt.