Rozwiązanie zad.1

Aby odbiornik nie odbierał żadnego sygnału z nadajnika, zakresy nadawanej i odbieranej częstotliwości nie mogą się przekrywać. Oznacza to, że minimalna zmiana częstotliwości wywołana ruchem odbiornika wynosi $\Delta f=2*5$ kHz. Zgodnie ze wzorem Dopplera $\Delta f/f \approx v/c$. Stąd $f=(c/v)\,\Delta f \approx 10^{12}$Hz (c - prędkość światła, v - prędkość odbiornika względem nadajnika).

Rozwiązanie zad.2

I sposób: Kręcący się naładowany krążek wytwarza pole magnetyczne przenikające drugi krążek. Ze wzrostem prędkości kątowej obrotu pierwszego krążka będzie wzrastał strumień indukcji magnetycznej przenikającej przez dowolnie wybrane koło współśrodkowe z drugim krążkiem i leżące w jego płaszczyźnie. Taki rosnący strumień indukcji wytwarza, zgodnie z prawem Faradaya, pole elektryczne styczne do okręgu będącego brzegiem rozważanego koła. Ze względu na znak "-" w prawie Faradaya, zwrot tego pola jest przeciwny do zwrotu prądu wywołanego ruchem ładunków z pierwszego krążka (do ustalenia tego zwrotu rozpatrujemy fragment pierwszego krążka najbliższy miejscu, w którym rozważamy to pole elektryczne). Takie pole elektryczne spowoduje obracanie się drugiego krążka w przeciwną stronę niż pierwszy krążek.
IIsposób: Pole magnetyczne wytwarzane przez obrót drugiego krążka powinno być takie, żeby przeciwstawić się wzrostowi pola magnetycznego wytwarzanego przez pierwszy krążek. Oznacza to, że drugi krążek powinien się kręcić w przeciwną stronę niż pierwszy. Uwaga: w praktyce rozważany efekt może być trudny do zaobserwowania, bo niejednorodności (w treści zadania było założenie jednorodności!) w rozkładzie ładunków może spowodować, że drugi krążek będzie się kręcił w tę samą stronę co pierwszy.

Rozwiązanie zad.3

Jeśli w ciągu czasu dt do lusterka dolatuje strumień fotonów o pędzie dp, to zmiana ich pędu w wyniku odbicia jest równa dp-(-dp)=2dp. Zatem siła F z jaką działają one na lusterko jest równa 2dp/dt. Związek między energią fotonu E_yi jego pędem $p_y$jest dany wzorem $E_y=p_y c$, gdzie c jest prędkością światła, co oznacza, że energia rozważanego strumienia fotonów jest równa dE=c dp=c(1/2)Fdt. Podstawiając F=1N, $c=3*10^8$m/s, otrzymamy, że moc lasera (czyli energia światła wysyłanego przez niego w jednostce czasu) powinna być równa $dE=dt=0{,}5N*3*10^8$m/s =1,5*108W = 150MW.

Rozwiązanie zad.4

Wystarczy rozważyć, pod jakim kątem będzie widoczna gwiazda, znajdująca się początkowo pod kątem $\theta=\pi/2$. Dla obserwatora poruszającego się światło wysłane przez nią porusza się z prędkością, której składowa w kierunku gwiazdy G wynosi -v, stąd $v = c \cos\theta'$, gdzie θ' jest kątem, pod jakim widzi rozważaną gwiazdę obserwator poruszający się. Zatem θ'arccos v/c=arccos1/2=$\pi/3=60^0$. Czyli połowę gwiazd poruszający się obserwator zaobserwuje w zakresie kątów od 0 do 60^0(i oczywiście drugą połowę w zakresie kątów od 60^0do 180^0)

Rozwiązanie zad.5

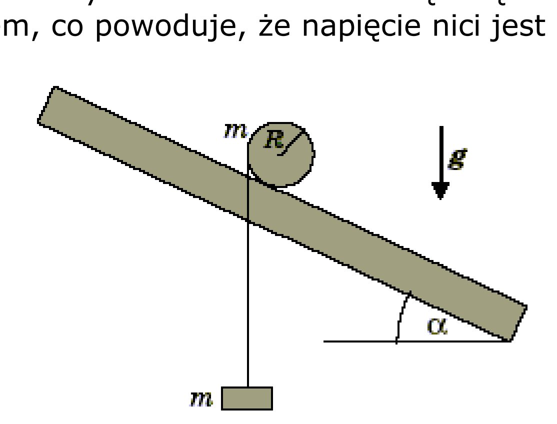
Związek między energią E cząstki, jej masą spoczynkową m i prędkości v jest dany wzorem:
$E = mc^2\gamma$, gdzie $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$, a c jest prędkością światła. W rozważanym przypadku mamy $\gamma = 10^{19}\,\mathrm{eV}/938\,\mathrm{MeV}$, co oznacza, że $v \approx c$. Zatem czas lotu protonu według obserwatora na Ziemi będzie równy T_{Ziemia}=4 lata. Oznaczmy przez T_{proton}czas tego lotu dla obserwatora współporuszającego się z protonem. Wykorzystując wzór na dylatację czasu, sprowadzający się w rozważanym przypadku do postaci $T_{Ziemia}=T_{proton}$, otrzymamy T_{proton}=4 lata/γ =365*24*3600 s/10^{10}=≈ $3*10^{-3}$s.

Rozwiązanie zad.6

Długość skoku lekkoatletki jest proporcjonalna do kwadratu jej prędkości początkowej v. Praca W wykonywana przez lokkoatletkę przy skoku proporcjonalna jest do siły jej mięśni F i wzrostu L ($W\infty FL$), więc dla lekkoatletki o masie m mamy $v^2\infty$ FL/m. Jeśli F, L i m opisują lekkoatletkę wyższą, to niższą opisują odpowiednio k^2F, kL i k^3m, gdzie k=1,5/1,8. Stąd dostajemy, że przy skoku prędkości początkowe obydwu lekkoatletek są równe, a więc obydwie skoczą na tę samą odległość.

Rozwiązanie zd.7

I sposób:"Przytrzymajmy palcem" walec tak, by się nie poruszał i rozważmy pozostałe siły działające na niego. Działanie siły napięcia nici oraz ciężaru walca jest równoważne działaniu jednej siły o wartości 2 mg, przyłożonej w połowie odległości między osią walca, a miejscem, w którym nitka styka się z walcem. Po puszczeniu walca, będzie się on wtaczał, jeśli prosta, na której leży ta siła, będzie za (patrząc od dołu) chwilową osią obrotu, czyli za punktem styczności walca z równią. Stąd $\alpha<30^0$. Uwaga: dla $\alpha<30^0$ciężarek obniża się z pewnym przyspieszeniem, co powoduje, że napięcie nici jest mniejsze niż mg. To zmniejszenie napięcia nici nie



rys. 1

może jednak być na tyle duże, by walec przestał się wtaczać, gdyż wtedy przyspieszenie ciężarka zmalałoby do zera, a w takiej sytuacji napięcie nici jest równe mg i zgodnie z przedstawionym rozumowaniem walec wtacza się na równię.
II sposób: Przy obrocie walca o kąt j (przyjmijmy, że j>0 odpowiada wtaczaniu się walca) jego energia zmieni się o $\Delta h_{\text{walca}} mg = \phi R \sin\alpha\ mg,$ natomiast energia ciężarka o $\Delta h_{\text{ciężarka}} mg = (\Delta h_{\text{walca}} - \phi R)\, mg = (\phi R\sin\alpha - \phi R)\, mg$ (Δh_{walca} oznacza tu zmianę wysokości, na jakiej znajduje się walec, a Dhciężarka -- zmianę wysokości, na jakiej znajduje się ciężarek). Walec będzie się wtaczał, jeśli suma tych energii będzie ujemna, czyli gdy
$\phi R\sin\alpha\ mg + (\phi R\sin\alpha - \phi R)\ mg = (2\sin\alpha - 1)\phi R\ mg < 0$, stąd $\sin\alpha < 1/2$, czyli $\alpha < 30°$.

Rozwiązanie zad.8

Siła nośna jest równa różnicy siły wyporu i ciężaru powłoki wraz z wypełniającym ją gorącym powietrzem (pomijamy gondolę, pasażerów, itd.). Dla danego balonu znajdującego się na pewnej wysokości siła wyporu jest maksymalna, gdy masa powietrza wewnątrz powłoki konieczna do jej napięcia jest możliwie najmniejsza. Spadek ciśnienia wraz z wysokością gazu gęstszego jest szybszy niż gazu rzadszego, więc ciśnienie (zimnego) powietrza na zewnątrz balonu maleje szybciej, niż ciśnienie (rozgrzanego - lżejszego) powietrza wewnątrz balonu. Dlatego do napięcia całej powłoki balonu wystarczy, aby przy dolnej jej powierzchni ciśnienia wewnątrz i na zewnątrz były sobie równe. Jeżeli w dolnej części powłoki znajduje się otwór, to warunek równości tych ciśnień jest spełniony, dzięki czemu siła nośna jest maksymalna w danych warunkach.

Rozwiązanie zad.9

Konstruktor nie ma racji. Niezrównoważony moment sił skierowany w kierunku ruchu wagonu powodowałby zmianę momentu pędu żyroskopu o wektor skierowany w tę samą stronę. Taka zmiana wymaga obrotu osi obrotu żyroskopu w płaszczyźnie poziomej. A to oznaczałoby obrót całego wagonu wokół osi pionowej. Temu obrotowi przeciwstawiają się kryzy na kołach jezdnych, co w sumie oznacza, że na wagon działa pionowo skierowany moment sił pochodzący od szyn. A przy takim momencie sił przewrócenie wagonu na bok jest już możliwe.

Rozwiązanie zad.10

Otwór wewnątrz graniastosłupa nie ma wpływu na stygnięcie, bo całe promieniowanie emitowane do otworu jest pochłaniane przez jego ścianki (ponieważ graniastosłupy mają dużą wysokość, pomijamy promieniowanie emitowane w pobliżu ich podstaw). W przypadku graniastosłupa o podstawie gwiazdy część promieniowania wyemitowanego przez jego powierzchnię boczną jest przez tenże graniastosłup pochłaniana. Zatem najwolniej będzie stygnąć graniastosłup o podstawie gwiazdy. Szybkości stygnięcia pozostałych graniastosłupów będą większe i równe sobie.

Rozwiązanie zad.11

Czas się nie zmieni, bo temperatura wody tuż przy powierzchni ziemniaka w obu przypadkach wynosi 1000 C, a od niej zależy ilość ciepła wnikającego do jego wnętrza.

Rozwiązanie zad.12

Ze wzrostem temperatury rośnie prędkość dźwięku w ośrodku, co oznacza malenie "współczynnika załamania" dla dźwięku. W przypadku gdy temperatura powietrza rośnie z wysokością, powietrze działa jak soczewka odchylająca dźwięk w dół. W efekcie do odległego słuchacza dochodzi dźwięk poprzez wyższe warstwy powietrza, nie tłumiony przez obiekty znajdujące się tuż nad ziemią. W przypadku temperatury malejącej z wysokością, dźwięk wysyłany przez źródło znajdujące się na ziemi jest odchylany do góry i nie może bezpośrednio dolecieć do odległego odbiornika (też znajdującego się na ziemi). Ten efekt nie będzie zachodził, jeśli zarówno źródło jak i odbiornik będą się znajdowały na odpowiedniej wysokości nad ziemią.

Rozwiązanie zad.13

I sposób: Tuż po przecięciu pierwszego sznurka, punkt zawieszenia pręta na drugim sznurku staje się chwilową osią obrotu. Otrzymujemy równania dynamiczne na przyspieszenie a środka masy pręta i jego przyspieszenie kątowe E:

$$\begin{aligned} ma &= mg - N, \\ I\epsilon &= Nd, \end{aligned} \quad ...(1)$$

gdzie N jest szukaną siłą naciągu, d = l/4 jest odległością środka masy od punktu zawieszenia pręta a I = $(1/12)ml^2$, jest momentem bezwładności pręta względem jego środka masy. Uwzględniając, że a=Ed i rozwiązując ten układ równań dostajemy:

$$N\frac{t}{T_{1/2}} = \log_{\frac{1}{2}} 0,05.$$

Dla I = $(1/12)ml^2$, d=l/4 otrzymamy N=(4/7)mg > (1/2)mg, a więc siła wzrośnie.
II sposób: Zauważmy, że gdyby pręt składał się z dwóch stykających się ze sobą, ale nie połączonych połówek (każda wisząca na "swoim" sznurku), to w sytuacji przed przecięciem sznurka rozkład sił byłby identyczny z przypadkiem rozważanym w treści zadania, a układ nadal byłby w stanie równowagi. W tym przypadku przecięcie jednego ze sznurków nie spowodowałoby zmiany siły naciągu drugiego sznurka. Ponieważ jednak w przypadku podanym w treści zadania obie połówki pręta są ze sobą połączone, to "spadająca połowa pręta" ciągnie za sobą drugą połowę, co oznacza, że siła naciągu drugiego sznurka wzrośnie. (Ta metoda rozwiązania ma zastosowanie tylko w przypadku, gdy nici są zawieszone w odległości l/4 od końca pręta .) Czyli prawidłowa jest odpowiedź a).

Rozwiązanie zad.14

Porównajmy sytuacje, gdy z obu butelek wyleciało już tyle samo wody. Ciśnienie powietrza wewnątrz butelki w przypadku a) będzie większe, niż w przypadku b), co oznacza, że woda będzie wylatywać w przypadku a) z większą prędkością. Jednocześnie całkowita masa rakiety (masa butelki wraz ze znajdującą się jeszcze wewnątrz niej wodą, oraz masa listewki) w przypadku b) będzie większa. Oznacza to, że do momentu, gdy z rakiety wyleci objętość wody równa 1/4 objętości butelki, każdorazowy przyrost prędkości rakiety spowodowany wyrzuceniem tej samej w obu przypadkach, małej ilości wody będzie większy w przypadku a), czyli do tego momentu rakieta a) osiągnie większą prędkość. Ale w tym końcowym momencie "silnik rakietowy" rakiety b) nie będzie już działał, bo ciśnienie w jej wnętrzu spadnie do ciśnienia atmosferycznego (przy założeniu rozprężania izotermicznego - dokładnie w tej chwili, przy bardziej realistycznym założeniu rozprężania adiabatycznego - nawet wcześniej). Skoro w przypadku a) rakieta osiągnie większą prędkość, oznacza to również, że wyżej poleci. Czyli prawidłowa jest odpowiedź a).

Rozwiązanie zad.15

Nie poruszający się poduszkowiec zgodnie z zasadami hydrostatyki wytwarza w wodzie pod sobą "dołek", analogicznie jak to robi zwykła łódka. Wolno przesuwający się poduszkowiec przesuwa znajdujący się pod nim dołek, a do tego niezbędna jest siła. W szczególności ruch przyspieszony wymaga "przyspieszenia" dołka. Gdy poduszkowiec porusza się szybko, przybliżenie statyczne jest nieadekwatne -- "dołek" robi się coraz mniejszy i maleje związana z tworzeniem się go siła. Czyli zarówno przesuwanie jak i przyspieszanie poduszkowca "unoszącego się" nad powierzchnią wody wymaga większych sił, niż w przypadku poduszkowca unoszącego się nad twardą, poziomą powierzchnią.