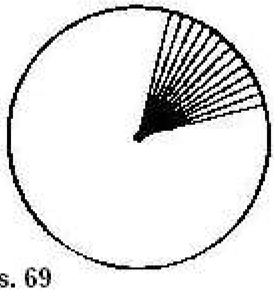
XXVIII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP I
Zadania teoretyczne

ZADANIE T1

Nazwa zadania: „Bryła sztywna”

Wyznacz moment bezwładności jednorodnego trójkąta o boku ***a***, ***b***, ***c*** i masie ***m*** względem osi prostopadłej do jego płaszczyzny i przechodzącej przez środek masy. Korzystając z otrzymanego wyniku, oblicz moment bezwładności jednorodnego koła o promieniu ***r*** i masie ***m*** względem osi symetrii. (koło należy tu potraktować jako zbiór bardzo dużej liczby „trójkątów” pokazanych na rys. 69).



Rys. 69

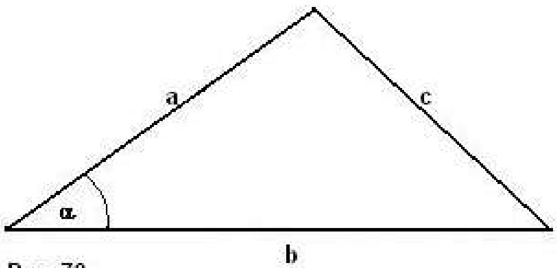
ROZWIĄZANIE ZADANIA T1

Znajomość ***a***, ***b*** i α całkowicie wyznacza trójkąt. Zatem moment bezwładności trójkąta względem środka masy (leżącego na przecięciu środkowym) musi mieć postać

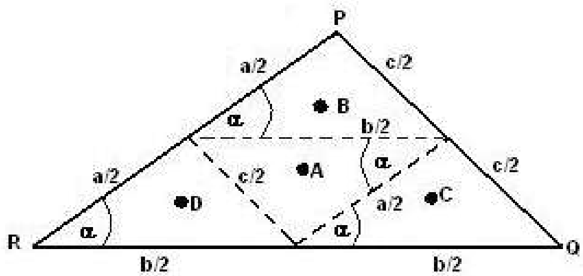
$$I = Kma^2 f(b/a,\alpha).$$

gdzie K jest nieznaną stałą, a $f(b/a,\alpha)$ – nieznaną funkcją dwu zmiennych: stosunku b/a i kąta α. Jest to najogólniejsza postać wyrażenia o wymiarze momentu bezwładności, jaką można zbudować z ***a***, ***b*** i α (rys. 70).

Podzielimy trójkąt na mniejsze przystające wzajemnie trójkąty o dwa razy mniejszych bokach, tak jak na rysunku 71. Zgodnie z twierdzeniem Steinera mamy:



Rys. 70



Rys. 71

$$I = 4I_1 + \frac{m}{4}AB^2 + \frac{m}{4}AC^2 + \frac{m}{4}AD^2. \tag{1}$$

gdzie ***I₁*** jest momentem bezwładności każdego z mniejszych trójkątów względem własnego środka masy. Mamy wiec

$$I_1 = \frac{1}{16}Kma^2 f(b/a,\alpha).$$

AB jest $1/3$ środkowej $\boldsymbol{m_P}$ wychodzącej z punktu ***P*** (punktu przecięcia środkowych dzieli je w stosunku 1:2). Podobnie $AC = \frac{1}{3} m_Q \; i \; AD = \frac{1}{3} m_R$. Mamy też ze wzoru na długość środkowej trójkąta

$$m_p^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + c^2\right) - \frac{1}{4}b^2,$$
$$m_Q^2 = \frac{1}{2}\left(b^2 + c^2\right) - \frac{1}{4}a^2,$$
$$m_R^2 = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right) - \frac{1}{4}c^2.$$

Uwzględniając powyższe zależności można napisać wzór (1) w następującej postaci

$$Kma^2 f(b/a,\alpha) = \frac{1}{4}Kma^2 f(b/a,\alpha) + \frac{m}{4}\frac{1}{12}\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Stąd

$$Ka^2 f(b/a,\alpha) = \frac{1}{36}\left(a^2 + b^2 + c^2\right),$$

zatem

$$I = \frac{1}{36} m\left(a^2 + b^2 + c^2\right).$$

Dla bardzo „wąskiego” trójkąta równobocznego o masie ***dm***, kącie rozwarcia ***d***α i bokach doń przyległych równych ***r***, mamy $dI' = \frac{1}{18} r^2 dm$. Jest to moment bezwładności tego trójkąta względem środka masy leżącego w odległości $\frac{2}{3}r$ od wierzchołka kąta ***d***α. Względem osi przechodzącej przez ten wierzchołek.

$$dI = dI' + dm\left(\frac{2}{3}r\right)^2 = \frac{1}{2}r^2 dm$$

ale $dm = \frac{m}{2\pi}d\alpha$, gdzie ***m*** jest masą koła.
Wobec tego

$$dI = \frac{1}{2}r^2 m \frac{d\alpha}{2\pi}$$

Całkując od zera do 2π dostaniemy $I = \frac{1}{2}mr^2$

(brak punktacji)

Źródło:
Zadanie pochodzi z czasopisma „Fizyka w Szkole”

Komitet Główny Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl