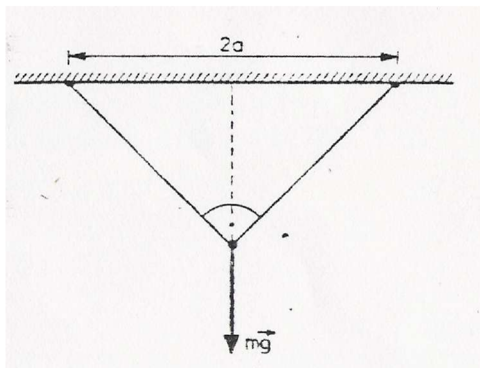
XXX OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP II
Zadanie teoretyczne

ZADANIE T3

Nazwa zadania „Alpinista zawieszony pomiędzy skałami”

Na środku gumki o długości początkowej 2a zamocowanej na końcach (rys. 7) do nieruchomych zaczepów odległych o *2a* zawieszono ciężarek. W stanie równowagi połówki

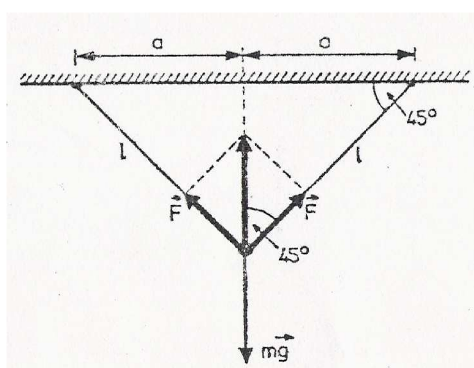


Rys. 7

gumki tworzą ze sobą kąt prosty (patrz rysunek). Wyznacz okres małych, pionowych drgań ciężarka po wytrąceniu go z opisanego położenia równowagi. Zakładamy, że gumka jest jednorodna, nieważka i że podlega prawu Hooke'a.

ROZWIĄZANIE ZADANIA T3

Niech stała sprężystości gumki wynosi *k.* Ze względu na założenie o jednorodności gumki, połowa gumki ma stałą sprężystości równą *2k.*
Po zawieszeniu ciężarka o masie m siła ciężkości *mg* zostaje zrównoważona przez siły



Rys. 8

sprężystości F obu połówek gumki i powoduje rozciąganie każdej z polówek gumki do długości $l = a\sqrt{2}$ (rys. 8). Wydłużenie każdej połówki gumki wynosi $a(\sqrt{2} - 1)$. Zatem z prawa Hooke'a

$$F = 2ka(\sqrt{2} - 1). \quad (1)$$

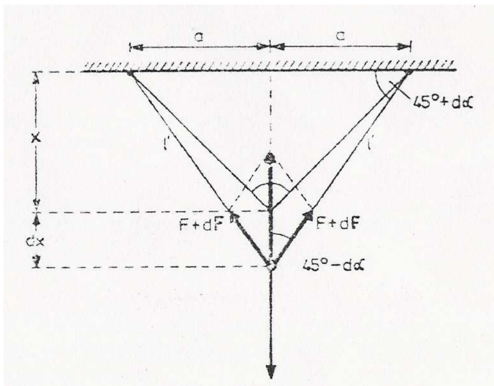
Korzystając z warunku równowagi

$$mg = 2F \cos 45°$$

otrzymamy stałą sprężystości gumki

$$k = \frac{mg}{a} \cdot \frac{1}{2(2-\sqrt{2})} \qquad (2)$$

Przy wychyleniu ciężarka z położenia równowagi w kierunku pionowym o wielkość dx (rys. 9) następuje nie tylko zmiana napięcia gumki spowodowana zmianą jej wydłużenia, ale również zmiana kąta między połówkami gumek.



Rys 9.

Z rysunku 9 wynika:

$$l' = \frac{a}{\cos(45^\circ + d\alpha)} =$$

$$= \frac{a}{\cos 45^\circ \cos d\alpha - \sin 45^\circ \sin d\alpha} \approx$$

$$\approx \frac{a\sqrt{2}}{1 - d\alpha} \approx a\sqrt{2}(1 + d\alpha)$$

a ponieważ

$$\frac{a + dx}{a} = tg 45^\circ + \alpha$$

$$dx = a[tg(45^\circ + \alpha) - tg 45^\circ] \approx 2a\, d\alpha \qquad (3)$$

Zmiana wydłużenia połówki gumki wynosi

$$dl = l' - l = \sqrt{2} \cdot a\, d\alpha$$

a zmiana napięcia każdej połówki zgodnie z prawem Hooke'a

$$dF = 2k \cdot dl = 2k \cdot \sqrt{2}\, a\, d\alpha \quad (4)$$

Siła nadająca ruch ciężarkowi w kierunku pionowym po wychyleniu o kąt $d\alpha$ wynosi

$$dF_w = 2(F + dF)\cos(45^\circ - \alpha) - 2F\cos 45^\circ \approx$$
$$\approx \sqrt{2}(dF + F\, d\alpha)$$

Korzystając z poprzednio obliczonych wielkości (1), (4) otrzymamy.

$$dF_w = 2k \cdot a(4 - \sqrt{2})d\alpha$$

Biorąc pod uwagę, że siła jest skierowana przeciwnie do wychylenia i podstawiając otrzymaną wartość *k* (2) i d_x (3) otrzymamy

$$dF_w = -\frac{mg}{a}\frac{4-\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}dx \quad (5)$$

Siła zawracająca jest więc proporcjonalna do wychylenia. Ciężarek będzie zatem wykonywać drgania harmoniczne.

Z teorii drgań harmonicznych wiadomo, że jeśli siła jest proporcjonalna do wychylenia

$$F = -C\,\Delta x$$

to masa *m* wykonuje oscylacje o okresie

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}} \quad (6)$$

Z wzoru (5) wynika, że w rozważanym przypadku

$$C = \frac{mg}{a}\frac{4-\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}$$

a więc okres drgań wynosi:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}\frac{4-2\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}}$$

ROZWIĄZANIE T3(drugi sposób)

Siła wypadkowa sił sprężystości w funkcji położenia *x* ciężarka o masie *m* (rys. 10) wynosi:

$$F_w = 2F \cdot \cos\alpha = 2F \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Ponieważ wydłużenie polowy gumki wynosi *l-a,* to siła napięcia *F* zgodnie z prawem Hooke'a jest:

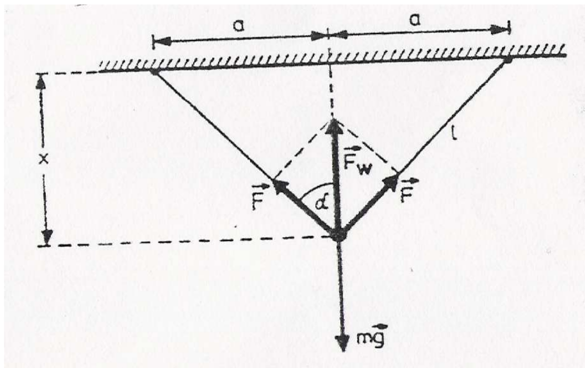
$$F = 2k(l - a)$$

Uwzględniając zwrot siły F_w otrzymamy:

$$F_w = -4k\left(x - \frac{ax}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right)$$

Małe wychylenie Δx od punktu równowagi wywoła pojawienie się siły ΔF_w

$$\Delta F_w = \left(\frac{dF_w}{dx} \Big|_{x=a} \right) \cdot \Delta x \qquad (7)$$



Rys. 10

Obliczając pochodną po współrzędnej x i wartość tej pochodnej w punkcie równowagi tj. dla x = a

$$\frac{dF_w}{dx}\Big|_{x=a} = -2k\frac{2\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

i uwzględniając obliczoną poprzednio wartość *k* (2) otrzymamy

$$\frac{dF_w}{dx}\Big|_{x=a} = -\frac{4-\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}\frac{mg}{a}$$

Wstawiając otrzymany wynik (8) do wzoru(7) obliczymy:

$$dF_w = -\frac{mg}{a}\frac{4-\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}dx$$

co jest identyczne z poprzednio otrzymanym wzorem (5).

Źródło:
Zadanie pochodzi z czasopisma „Fizyka w Szkole”

Komitet Okregowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szc.pl