

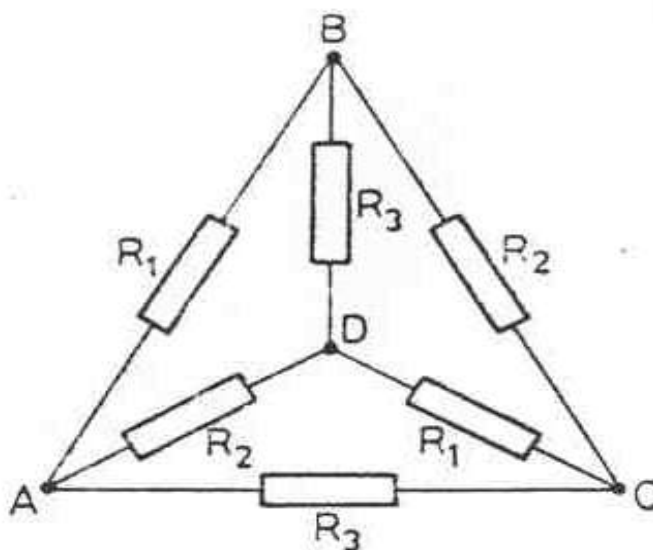
XXXII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP I

Zadanie teoretyczne

ZADANIE T4

Nazwa zadania: „Zabawa z opornikami”

Sześć oporów w wartościach R_1 , R_2 , R_3 połączono w czworościan w sposób pokazany na ryc. 6. Znajdź opór zastępczy między

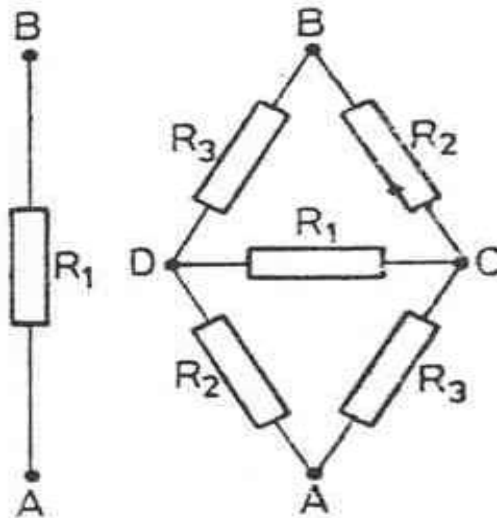


Ryc. 6

dwoma dowolnymi wierzchołkami tego czworościanu. Czy możliwe jest zastąpienie przedstawionego układu sześciu oporów, łączących cztery punkty A, B, C, D układem czterech oporów? Jeśli tak, oblicz wartości odpowiednich oporów.

ROZWIĄZANIE ZADANIA T4

Obliczymy R_{AB} . Dany układ jest połączeniem równoległym dwu gałęzi przedstawionych na ryc. 7.



Ryc. 7

Opór pierwszej gałęzi wynosi R_1 . Natomiast opór drugiej wynosi

$$\frac{2R_2R_3 + R_1(R_2 + R_3)}{R_2 + R_3 + 2R_1}.$$

Opór zastępczy R_{AB} obliczamy zgodnie z prawem wyznaczania oporu zastępczego dla połączenia równoległego:

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_1} + \frac{R_2 + R_3 + 2R_1}{2R_2R_3 + R_1(R_2 + R_3)}.$$

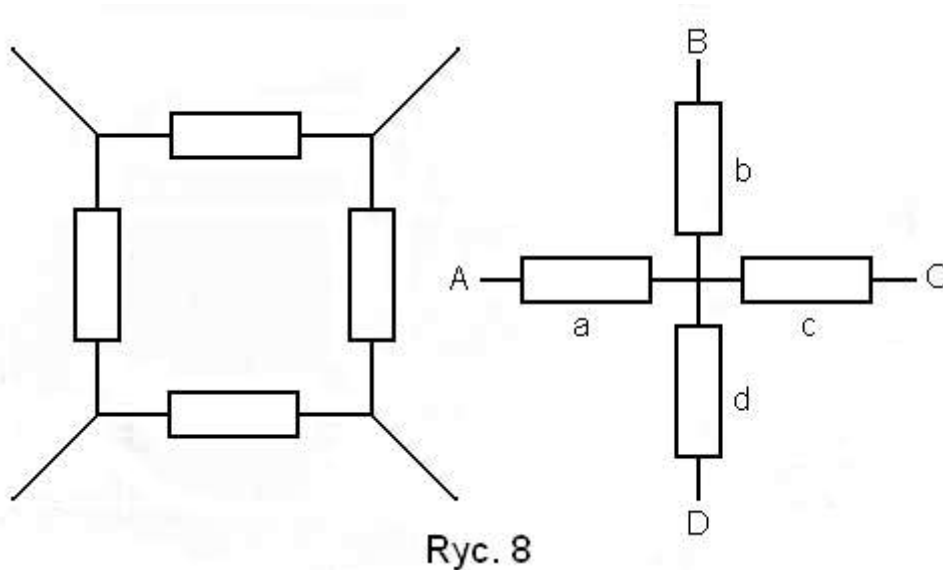
Stąd

$$R_{AB} = \frac{R_1(2R_2R_3 + R_1(R_2 + R_3))}{2R_2R_3 + 2R_1R_2 + 2R_1R_3 + 2R_1^2}.$$

Dla innych par wierzchołków opór zastępczy otrzymuje się bez rachunków przez odpowiednią zmianę wskaźników. Zauważmy, że mamy następujące relacje symetrii:

$$R_{AB} = R_{CD}, \quad R_{BC} = R_{AD}, \quad R_{AC} = R_{BD}.$$

Należy teraz zbadać, czy rozważane połączenie może być równoważne połączeniu czterech oporów w kwadrat lub czteroramienną gwiazdę (ryc. 8). Inne możliwości jako prowadzące do oporów zerowych od razu odrzucamy.



Weźmy dla przykładu gwiazdę. Ze wspomnianych symetrii wynika, że nieznanne opory a , b , c , d muszą spełniać zależność:

$$a + b = c + d$$

$$a + d = b + c$$

$$a + c = b + d$$

Stąd zaś wynika, że $a = b = c = d$. Zatem wszystkie sześć oporów R_{AB} , R_{AC} , R_{AD} , R_{BC} , R_{BD} i R_{CD} musiałyby być sobie równe. Tymczasem w ogólnym przypadku przyłączenia w czworóścian rozważane sześć oporów R_{ij} może przyjmować nie jedną lecz trzy różne wartości. Zatem w ogólnym wypadku połączenie w czworóścian nie jest równoważne połączeniu w gwiazdę. W podobny sposób dowodzi się, że w ogólnym wypadku połączenie w czworóścian nie jest równoważne połączeniu w kwadrat.

Źródło:
Zadanie pochodzi z czasopisma „Fizyka w Szkole” maj-czerwiec 83r.

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szcz.pl