

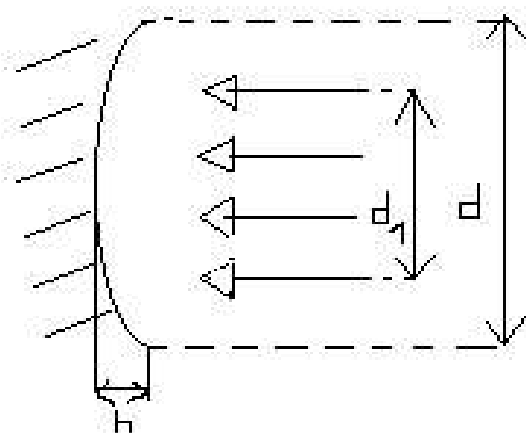
# XXXVII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP I

## Zadanie teoretyczne

### ZADANIE T4

Nazwa zadania: „Optyka geometryczna”

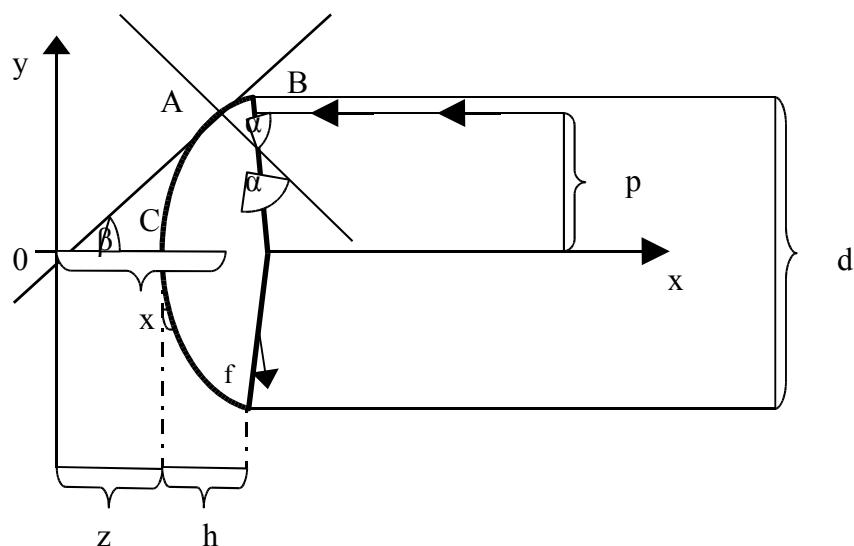
Na zwierciadło wklęsłe o średnicy  $d = 24\text{cm}$  i wysokości  $h = 8\text{cm}$ , mające kształt równoosiowej hiperboloidy obrotowej, wzdłuż osi symetrii pada równoległa wiązka światła o średnicy  $d_1 = 22\text{cm}$ .



Punkty przecięcia promieni odbitych od zwierciadła z osią symetrii wyznaczają na niej pewien odcinek. Wyznacz położenie końców tego odcinka.

### ROZWIĄZANIE ZADANIA T4

W rozwiązaniu zadania pomoże nam rysunek wykonany w układzie współrzędnych, na którym dokładnie rozrysujemy bieg promieni wzdłuż osi symetrii i ich odbicie od powierzchni wklęsłej zwierciadła.



Równanie hiperboli występującej w zadaniu ma postać:

$$x^2 - y^2 = a^2$$

gdzie  $a$  nie jest określone, możemy to zrobić wiedząc, że punkty B i C leżą na hiperboli, więc:

$$z^2 - 0^2 = a^2$$

$$\left(z + h\right)^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 = a^2$$

Po podstawieniu odpowiednich wartości za  $d$  i  $h$  otrzymujemy, że

$$z = a = 5\text{cm}$$

Rozpatrzmy bieg promienia w odległości  $p$  od osi symetrii. Promień ten pada na zwierciadło w punkcie  $A = (x, p)$ :

$$x^2 - p^2 = a^2$$

$$x = \sqrt{p^2 + a^2}$$

zatem

$$A = \left(\sqrt{p^2 + a^2}, p\right)$$

Kąt padania  $\alpha$  tego promienia spełnia związek

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$$

przy czym

$$\text{tg}\beta = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

Po odbiciu promień ten przecina oś symetrii w odległości  $f$  od wierzchołka zwierciadła. Mamy

$$f = f_1 + x - z \quad (*)$$

$$f_1 = p \cdot \text{ctg}2\alpha = p \frac{1 - \text{tg}^2\alpha}{2\text{tg}\alpha}$$

Wobec tego

$$\text{tg}\alpha = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \text{ctg}\beta = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}$$

natomiast

$$f_1 = p \frac{1 - \frac{x^2 - a^2}{x^2}}{2 \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}} = p \frac{a^2}{2x\sqrt{x^2 - a^2}}$$

Ze związku(\*) po uwzględnieniu wyrażenia na  $f_1$  i skorzystaniu z równania hiperboli dostajemy

$$f = p \frac{a^2}{2x\sqrt{x^2 - a^2}} + x - a = p \frac{a^2}{2\sqrt{p^2 + a^2} \cdot p} + \sqrt{p^2 + a^2} - a = \frac{3a^2 + 2p^2}{2\sqrt{a^2 + p^2}} - a$$

$f(p)$  jest funkcją rosnącą w interesującym nas przedziale  $p$

Dla  $p = 0$ :  $f = \frac{1}{2}a = 2,5\text{cm}$  (wiązka jest przysoiwa)

Dla  $p = \frac{1}{2}$   $d_1 = 11\text{cm}$ ;  $f \approx 8,1\text{cm}$

Odpowiedź:

Padająca wiązka promieni przecina oś symetrii zwierciadła w punktach odległych od wierzchołka o od 2,5cm do 8,1cm

**Punktacja:**

Czytelny rysunek	2 pkt.
Określenie $a$	1 pkt.
Wyznaczenie $f(p)$	4 pkt.
Monotoniczność $f(p)$	1 pkt.
Końce odcinka	2 pkt.

---

razem 10 pkt.

Źródło:  
Zadanie pochodzi z czasopisma „Fizyka w szkole” styczeń-luty 1988

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie  
[www.of.szc.pl](http://www.of.szc.pl)