

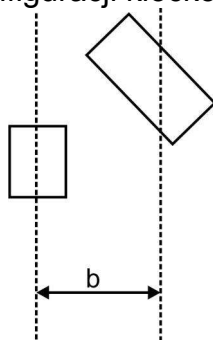
XLII OLIMPIADA FIZYCZNA ETAP III

Zadanie teoretyczne

ZADANIE T1

Nazwa zadania: „Obracające się bloczki”

Po płaskim, poziomym stole ślizgają się bez tarcia dwa różne płaskie kločki o jednakowych masach m . Początkowo kločki przemieszczają się ruchem postępowym (bez obrotów) tak, że ich środki mas poruszają się z jednakowymi prędkościami v po równoległych liniach prostych. Odległość między tymi liniami wynosi d . Rycina 1 przedstawia jedną z możliwych konfiguracji klozków.



Ryc. 1

W pewnym momencie następuje doskonale sprężyste zderzenie klozków. Po zderzeniu kločki wykonują ruch postępowo –obrotowy nadal ślizgają się po powierzchni stołu. Prędkość kątowna pierwszego kločka wynosi ω_1 , zaś prędkość kątowna drugiego wynosi ω_2 . moment bezwładności klozków względem osi pionowych przechodzących przez środki mas klozków wynoszą odpowiednio I_1 i I_2 .

- 1) Wykaż, że moment pędu kločka względem dowolnego, ustalonego punktu stołu jest równy sumie momentu pędu środka masy kločka względem tego punktu oraz momentu pędu kločka względem jego środka masy.
- 2) Oblicz odległość d' między prostymi, po których poruszają się środki mas klozków po zderzeniu.
- 3) Przyjmując, że po zderzeniu wartości prędkości pierwszego kločka wynosi $v/\sqrt{2}$, zaś drugi kloček nie wykonuje obrotów, podaj i zinterpretuj (naszkić) zależność d' od d .

ROZWIĄZANIE ZADANIA T1

- 1) Niech r_i i r'_i oznaczają odpowiednio wektory wodzące punktów materialnych o masach m_i w układzie związanym ze stołem i w nieobracającym się układzie środka masy kločka. Wtedy $r_i = R + r'_i$ i $v_i = V + v'_i$, gdzie $v_i = dr_i/dt$ i $v'_i = dr'_i/dt$, zaś wektory R i V odnoszą się do środka masy. Moment pędu wyraża się wzorem

$$J = \sum_i m_i r_i \times v_i = \sum_i m_i R \times V + \sum_i m_i r'_i \times V + \sum_i m_i R \times v'_i + \sum_i m_i r'_i \times v'_i = MR \times V + I\omega \quad (1)$$

gdzie skorzystaliśmy z równości

$$\sum_i m_i r_i' = 0 \quad (\text{środek masy})$$

i z jej pochodnej

$$\left(\frac{d}{dt}\right) \sum_i m_i r_i' = \sum_i m_i v_i' = 0$$

$\sum_i m_i = M$ jest całkowitą masą klocka, zaś I – jego momentem bezwładności względem przechodzącej przez środek masy osi obrotu, określonej przez prostopadły do powierzchni stołu wektor prędkości kątovej $\vec{\omega}$. Ponieważ wektory r_i' i v_i' są wzajemnie prostopadłe i oba leżą w płaszczyźnie stołu, ich iloczyn wektorowy $r_i' \times v_i'$ jest skierowany zgodnie z $\vec{\omega}$. Wartość prędkości $v_i' = |\omega| r_i'$, zatem

$$\sum_i m_i r_i' \times v_i' = \sum_i m_i r_i'^2 \vec{\omega} = I \vec{\omega} \quad (2)$$

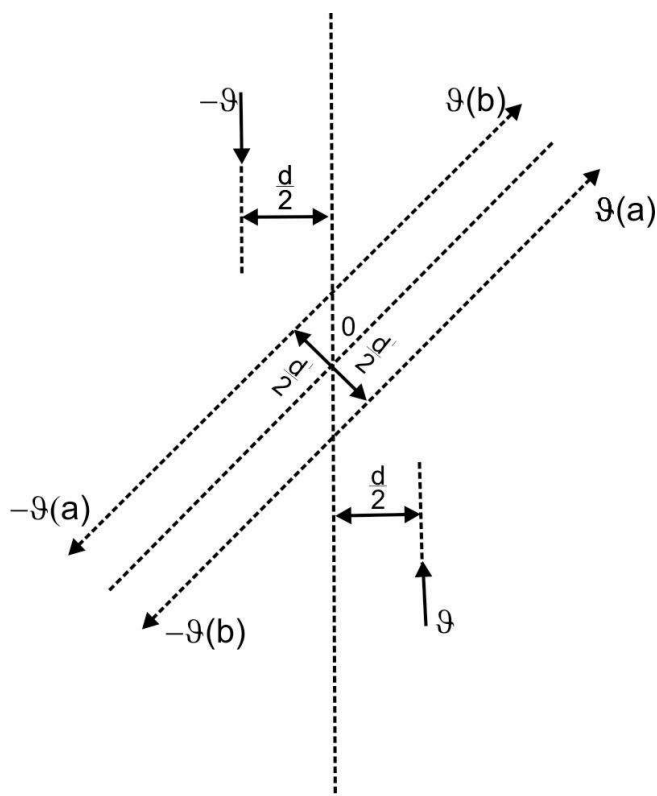
2) Po zderzeniu prędkości klocków będą jednakowe co do wartości lecz przeciwnie skierowane, co wynika z zasady zachowania całkowitego pędu układu. Korzystając z zasady zachowania energii i momentu pędu układu dwóch klocków otrzymujemy równania

$$2 \frac{mv^2}{2} = 2 \frac{mv'^2}{2} + \frac{I_1 \omega_1^2}{2} + \frac{I_2 \omega_2^2}{2} \quad (3)$$

$$2mv \frac{d}{2} = \pm 2mv' \frac{d'}{2} + I_1 \omega_1 + I_2 \omega_2 \quad (4)$$

gdzie d' i v' oznaczają odpowiednio odległość wzajemną torów i wartość prędkości klocków po zderzeniu. Prędkościom kątowym $\omega < 0$ odpowiada obrót klocka w kierunku zgodnym, zaś prędkościom $\omega > 0$ – obrót w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (patrzemy z góry na klocek ślizgający się po stole). Orbitalny moment pędu układu klocków względem wspólnego środka masy O , $L = \pm mv' d'$, jest dodatni lub ujemny, w zależności od sposobu obiegu punktu O przez oba klocki po zderzeniu, ryc. 2.

sposób obiegów a(L>0)
sposób obiegów b(L<0)



Ryc. 2

Z równań (3) i (4) wyznaczamy v'

$$v' = \sqrt{v^2 - \frac{I_1 \omega_1}{2m} - \frac{I_2 \omega_2}{2m}} \quad (5)$$

oraz d'

$$d' = \left| \frac{mvd - I_1 \omega_1 - I_2 \omega_2}{mv'} \right| \quad (6)$$

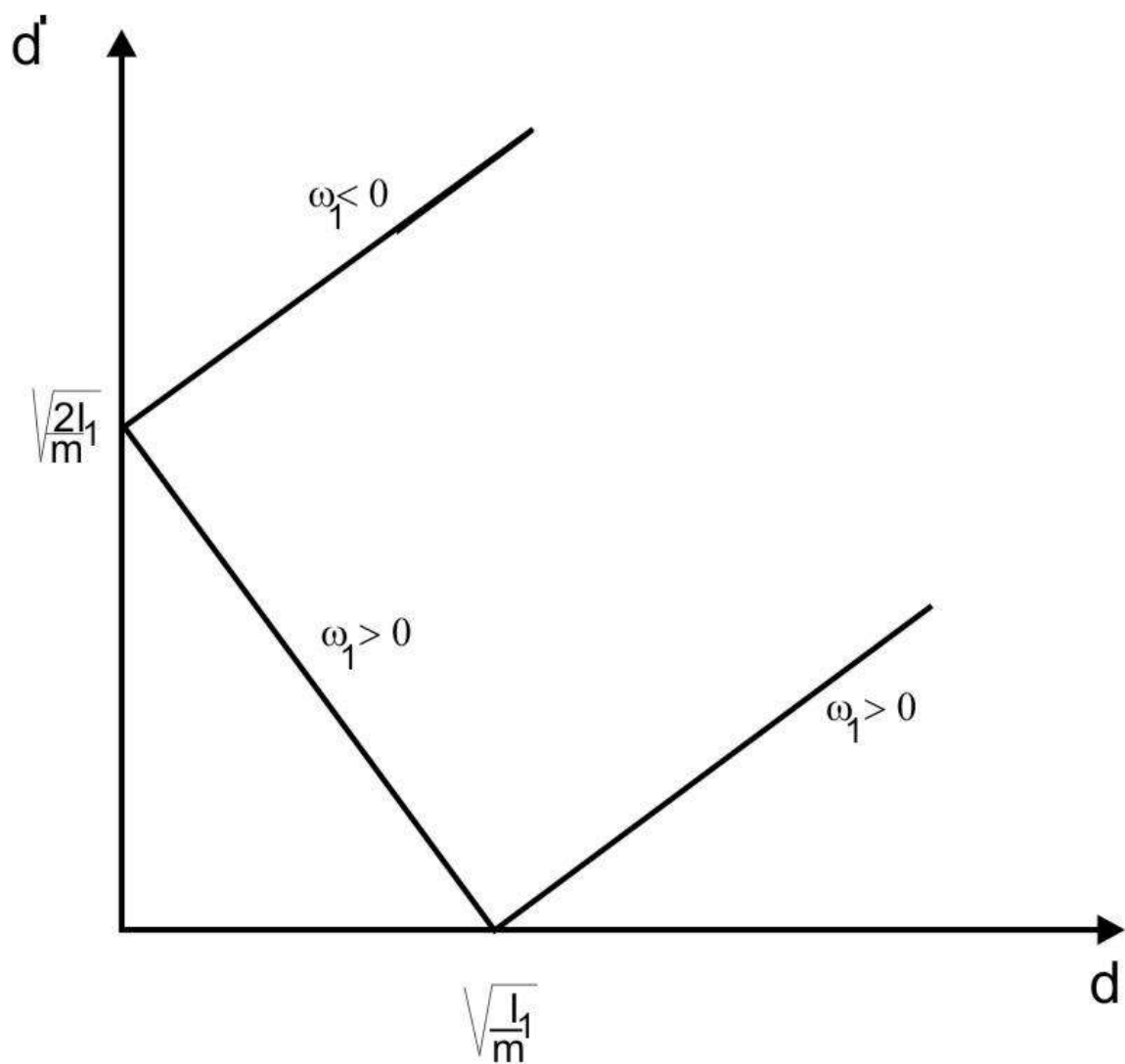
3) Ponieważ wartość prędkości obu klocków po zderzeniu wynosi $v' = v/\sqrt{2}$, zaś $\omega_2 = 0$, korzystając ze wzoru (3) otrzymujemy

$$\omega_1 = \mp v \sqrt{\frac{m}{I_1}} \quad (7)$$

skąd po podstawieniu do (6) otrzymujemy

$$d' = \sqrt{2} \left| d - \frac{I_1 \omega_1}{mv} \right| = \sqrt{2} \left| d \mp \sqrt{\frac{I_1}{m}} \right| \quad (8)$$

Wykres zależności d' od d jest przedstawiony na rycinie 3.



Ryc. 3

Źródło:
Zadanie pochodzi z „Druk OF”

Komitet Okręgowy Olimpiady Fizycznej w Szczecinie
www.of.szcz.pl