Rozwiązanie zadania 1.

Zagadnienie będziemy rozpatrywali w układzie, w którym stożek jest nieruchomy.
a) Ponieważ zderzenie jest doskonale sprężyste, a powierzchnia stożka nieruchoma, atom gazu po zderzeniu będzie miał prędkość v skierowaną pod kątem 2α w stosunku do początkowej prędkości. Zatem zmiana równoległej do osi stożka składowej pędu atomu o masie m jest równa

$$\Delta p = mv\,(\cos 2\alpha - 1)\ . \qquad (1)$$

W czasie Δt ze stożkiem zderza się ΔN atomów gazu, przy czym

$$\Delta N = (\rho/m)vS\Delta t. \qquad (2)$$

Zatem całkowita siła oporu działająca na stożek jest równa

$$P_{oporu} = -\Delta N\ \Delta p/\Delta t = (1 - \cos 2\alpha)\ \rho v^2\ S = 2\ \sin^2 \alpha\rho\ v^2\ S. \qquad (3)$$

Jej wartość liczbowa dla podanych danych wynosi

$$F_{oporu} \approx 490\ \text{N}. \qquad (4)$$

Punktacja

Wzór na zmianę pędu cząsteczki (wzór (1)).. 3pkt.
Obliczenie liczby cząsteczek zderzających się ze stożkiem (wzór (2))............................... 3pkt.
Wzór na siłę oporu (wzór (3)).. 3pkt.
Obliczenie liczbowej wartości siły oporu (wzór (4))... 1 pkt.

Rozwiązanie zadania 2

Prążki interferencyjne pojawiają się, gdy różnica faz fal (de Broglie'a) wychodzących z sąsiednich szczelin siatki jest równa wielokrotności 2π czyli, gdy kąt ugięcia wiązki α spełnia warunek

$$d\sin\alpha = n\lambda, \qquad (1)$$

gdzie n jest liczbą całkowitą, a λ - długością fali de Broglie'a cząsteczki o masie m i prędkości v

$$\lambda = \frac{h}{mv'}$$

(2)

(h jest stałą Plancka).

Dla wiązki cząsteczek o jednakowych prędkościach (i idealnej siatki dyfrakcyjnej, o dużej liczbie szczelin) każdy prążek jest nieskończenie cienki. Jednak w naszym przypadku, ze względu na różne prędkości cząsteczek wiązce, prążek n-tego rzędu będziemy obserwować dla kątów ugięcia α od $\alpha = \alpha_n^+$ do $\alpha = \alpha_n^-$ gdzie

$$d \sin \alpha_n^+ = n \frac{h}{m(v_0 + \Delta v)} \approx d\alpha_n^+$$

$$d \sin \alpha_n^- = n \frac{h}{m(v_0 - \Delta v)} \approx d\alpha_n^-$$

Zatem kąt odpowiadający położeniu środka prążka n-tego rzędu jest dany wzorem

$$\alpha_n = \frac{1}{2} n \frac{h}{md} \left(\frac{1}{v_0 - \Delta v} + \frac{1}{v_0 + \Delta v} \right) = n \frac{hv_0}{mdv_0^2 - (\Delta v)^2}$$

(3)

a kąt odpowiadający szerokości tego prążka wzorem

$$\Delta\alpha_n = n \frac{h}{md} \left(\frac{1}{v_0 - \Delta v} - \frac{1}{v_0 + \Delta v} \right) = n \frac{h 2\Delta v}{mdv_0^2 - (\Delta v)^2}$$

(4)

Dla podanych wartości liczbowych otrzymamy (w radianach)

$$\alpha_1 \approx 4{,}8 * 10^{-5} \quad (5)$$

$$\Delta\alpha_1 \approx 1{,}6 * 10^{-5} \quad (6)$$

b) Na ekranie, między n-tym a n + 1 prążkiem będą miejsca, do których nie dolatują cząsteczki, jeśli

$$\alpha_n^- < \alpha_{n+1}^+ \quad (7)$$

czyli

$$n \frac{h1}{mdv_0 - \Delta v} < (n+1) \frac{h}{mdv_0 + \Delta v}$$

co daje

$$\Delta v < \frac{v_0}{2n+1}. \quad (8)$$

Jeśli powyższa nierówność będzie spełniona, to również między n-1 a n-tym prążkiem będzie obszar, do którego nie dolatują cząsteczki. Zatem wzór (8) jest szukanym warunkiem na dopuszczalny rozrzut prędkości.

Punktacja

a)

Związek między długością fali a prędkością cząsteczek (wzór (2))................................... lpkt.

Wzór (1) na położenie prążków interferecyjnych.. lpkt.

Wyznaczenie położenia środka n-tego prążka (wzór (3)) wraz z wynikiem liczbowym (wzór (5)).. 2pkt.

(w przypadku wyznaczenia położenia środka prążka jako odpowiadającego prędkości v_0 1 pkt.)

Wyznaczenie szerokości n-tego prążka (wzór (4)) wraz z wynikiem liczbowym (wzór (6)).. 1pkt.

b)

Warunek (wzór (7) lub równoważny) przy spełnieniu którego nie ma detekcji cząsteczek między prążkami.. 1pkt.

Końcowy warunek na Δv (wzór (8))... 2pkt.

Wyjaśnienie, że przy spełnienie warunku (8) również między n-l**,** a n-tym prążkiem nie ma detekcji cząsteczek.. 1pkt.

Rozwiązanie zadania 3.

a) W stanie równowagi, przy infinitezymalnej zmianie promienia o dr, suma prac wykonanych przez siły ciśnienia zewnętrznego i wewnętrznego jest równa zmianie energii sprężystej balonika

$$(p - p_0)\Delta V = \Delta E_S,$$

czyli

$$(p - p_0)4\pi r^2 dr \ =1/2\alpha(4\pi)^2 4r^3 dr,$$

co daje

$$p - p_0 = 8\pi\alpha r. \qquad (1)$$

Dla promieni r_1 i r_2 dostajemy

$$p_1 - p_0 = 8\pi\alpha r_1,$$
$$p_2 - p_0 = 8\pi\alpha r_2,$$

stąd

$$\frac{p_2 - p_0}{p_1 - p_0} = \frac{r_2}{r_1}$$

Ostatecznie

$$p_2 = \frac{r_2}{r_1}(p_1 - p_0) + p_0 = 1{,}15 * 10^5 Pa. \qquad (2)$$

b) Ponieważ w tym procesie nie ma przepływu ciepła, a zanurzanie odbywa się powoli, z równania adiabaty $pV^{\gamma} = const$ mamy

$$p_2 (\frac{4}{3}\pi r_2^3)^{\gamma} = p_3 (\frac{4}{3}\pi r_3^3)^{\gamma},$$

gdzie P3 jest ciśnieniem w baloniku po zanurzeniu go w wodzie (tak by miał promień r_3), a $\gamma = (c_v + R)/c_v = 7/5$. Stąd

$$p_3 = p_2 (\frac{r_2}{r_3})^{3\gamma} \approx 6{,}3 * 10^5 Pa \qquad (3)$$

zatem ciśnienie wody na zewnątrz balonika jest równe

$$p_{\omega} = p_3 - 8\pi\alpha r_3 = p_3 - (p_1 - p_0)\frac{r_3}{r_1} \approx 6{,}2 * 10^5 Pa. \qquad (4)$$

W wodzie, na głębokości h, ciśnienie jest równe $p_0 + d_{\omega}gh$, zatem

$$h = \frac{p_{\omega} - p_0}{d_{\omega} g} \approx 53m. \qquad (5)$$

Temperaturę wewnątrz balonika po zanurzeniu wyznaczymy korzystając z równania stanu gazu doskonałego
pV = N RT:

$$T_3 = \frac{p_3 V_3}{NR} = \frac{p_3 V_3}{p_2 V_2 / T_0} = \frac{p_3}{p_2}(\frac{r_3}{r_2})^3 T_0 = (\frac{r_2}{r_3})^{3\gamma - 3} T_0 \approx 488K. \qquad (6)$$

c) - I sposób
Praca wykonana w tym procesie jest równa zmianie energii układu równej sumie zmian energii wewnętrznej gazu ΔE_g, energii sprężystości gumy balonika ΔE_g i energii objętościowej otoczenia ΔE_0

$$\Delta E_g = N\, c_V (T_3 - T_0), \qquad (7)$$

$$\Delta E_S = 8\pi^2\alpha(r^4_3 - r^4_2) \qquad (8)$$

Energia objętościowa jest równa pracy potrzebnej do "rozepchnięcia" wody (lub innego ośrodka), tak by w nim zmieściło się dane ciało i wynosi $E_0 = pV$. (Łatwo sprawdzić, że dla ciała o stałej objętości zmiana energii objętościowej przy zanurzeniu ciała jest równa pracy wykonanej w tym procesie.) W naszym przypadku

$$\Delta E_0 = -4/3\pi p_0 r^3_2 + 4/3\pi p_{\omega} r^3_3, \qquad (9)$$

zatem

$$W = Nc_V(T_3 - T_0) + 8\pi^2\alpha(r_3^4 - r_2^4) + \frac{4}{3}\pi(-p_0 r_2^3 + p_\omega r_3^3). \qquad (10)$$

Ilość gazu (liczba moli) gazu jest równa N = $p_2V_2/(RT_0)$, stała $\alpha = (p_1 - p_0)/(8\pi r_1)$. Pozostałe parametry już wyznaczyliśmy, zatem

$$\begin{aligned}
W &= \frac{4}{3}\pi\frac{c_V p_2 r_2^3}{RT_0}(T_3 - T_0) + \pi\frac{p_1 - p_0}{r_1}(r_3^4 - r_2^4) + \frac{4}{3}\pi p_\omega r_3^3 - \frac{4}{3}\pi p_0 r_2^3 \\
&= \frac{4}{3}\pi\frac{c_V}{R}p_2 r_2^3\left[(\frac{r_2}{r_3})^{3\gamma-3} - 1\right] - \frac{\pi p_1 - p_0}{3r_1}r_3^4 - \pi\frac{p_1 - p_0}{r_1}r_2^4 \\
&+ \frac{4}{3}\pi p_2(\frac{r_2}{r_3})^{3\gamma}r_3^3 - \frac{4}{3}\pi p_0 r_2^3 \qquad (11)\\
&= \frac{4}{3}\pi\frac{c_V + R}{R}p_2 r_2^3\left[(\frac{r_2}{r_3})^{3\gamma-3} - 1\right] - \frac{\pi p_1 - p_0}{3r_1}(r_3^4 - r_2^4) \\
&= \frac{4}{3}\pi\frac{c_V + R}{R}(p_0 + \frac{p_1 - p_0}{r_1}r)r_2^3\left[(\frac{r_2}{r_3})^{3\gamma-3} - 1\right] - \frac{\pi p_1 - p_0}{3r_1}(r_3^4 - r_2^4)
\end{aligned}$$

Ostatecznie wynik można zapisać w postaci

$$W = \frac{4}{3}\pi\frac{c_V + R}{R}(p_0 + \frac{p_1 - p_0}{r_1}r_2)r_2^3\left[(\frac{r_2}{r_3})^{3\gamma-3} - 1\right] - \frac{\pi p_1 - p_0}{3r_1}(r_3^4 - r_2^4). \qquad (12)$$

Podstawiając wartości liczbowe otrzymujemy, że szukana praca jest równa

$$W \approx 3{,}6*10^3 \text{ J}. \qquad (13)$$

c) - II sposób

Siła wyporu działająca na zanurzony balonik jest równa

$$F_\omega = \frac{4}{3}\pi r^3 d_w g,$$

gdzie r jest promieniem balonika znajdującego się na głębokości z.

Zgodnie z wzorami (3) i (4) związek między promieniem balonika a głębokością jest dany wzorem

$$p_0 + d_\omega g z = p_2(\frac{r_2}{r})^{3\gamma} - (p_1 - p_0)\frac{r}{r_1}$$

stąd praca jest równa

$$W=\int_{r_2}^{r_3}F_\omega dz=\int_{r_2}^{r_3}\frac{4}{3}\pi r^3\left[p_2(-3\gamma)\frac{(r_2)^{3\gamma}}{r^{3\gamma+1}}-(p_1-p_0)\frac{1}{r_1}\right]dr=\frac{4}{3}\pi\int_{r_2}^{r_3}\left[p_2(-3\gamma)\frac{(r_2)^{3\gamma}}{r^{3\gamma-2}}-(p_1-p_0)\frac{r^3}{r_1}\right]dr$$

$$=\frac{4}{3}\pi\left[p_2\frac{-3\gamma(r_2)^{3\gamma}}{3-3\gamma r^{3\gamma-3}}-\frac{1}{4}(p_1-p_0)\frac{r^4}{r_1}\right]_{r_2}^{r_3}=\frac{4}{3}\pi\left[p_2\frac{c_V+R(r_2)^{3\gamma}}{Rr_3^{3\gamma-3}}-p_2\frac{c_V+R}{R}r_2^3-\frac{1}{4}(p_1-p_0)\frac{r_3^4}{r_1}+\frac{1}{4}(p_1-p_0)\frac{r_2^4}{r_1}\right]$$

$$=\frac{4}{3}\pi\left\{p_2\frac{c_V+R}{R}r_2^3\left[(\frac{r_2}{r_3})^{3\gamma-3}-1\right]-\frac{1}{4}(p_1-p_0)\frac{r_3^4}{r_1}+\frac{1}{4}(p_1-p_0)\frac{r_2^4}{r_1}\right\} \tag{14}$$

co jest zgodne z (12)

Punktacja

a)

Ustalenie związku różnicy ciśnień wewnętrznego i zewnętrznego z promieniem balonika (wzór (1) lub równoważny).. 2pkt.

Wyznaczenie ciśnienia wewnątrz balonika odpowiadającego promieniowi T2 (wzór (2) lub równoważny).. .... 1pkt.

b)

Wyznaczenie ciśnienia (wzór (3) i temperatury (wzór (6)) wewnątrz balonika po zanurzeniu.. 1pkt.

Wyznaczenie głębokości, na jaką się zanurzy balonik (wzór (5))... 2pkt

c) - I sposób

Stwierdzenie, że wykonana praca jest równa sumie zmian: energii wewnętrznej gazu, energii sprężystości gumy i energii objętościowej otoczenia wraz ze wzorami (7) (8) (9) (lub równoważnymi) ., ... 2pkt.

Jawna postać wyniku (wzór (12) na W lub równoważny)... 1pkt.

Obliczenie liczbowej wartości wykonanej pracy (wzór (13)... 1pkt.

c) - II sposób

Jawne wypisanie całki na W (wzór (14)).. 1pkt.

Wykonanie całki i otrzymanie jawnego wyniku (wzór (12 lub równoważny)............................ 2pkt.

Obliczenie liczbowej wartości wykonanej pracy (wzór (13)... 1pkt.

Zdródło: www.of.szc.pl